

SC
C
1663

Fibrados canónicos
e
ideales jacobianos
sobre esquemas aritméticos

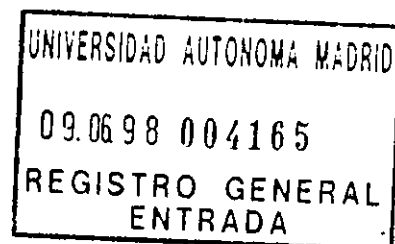
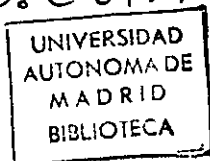
Tesis doctoral presentada por

Ana Bravo Zarza

y dirigida por

Orlando E. Villamayor

R. B. C 67.705



Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

A mi familia y a Jesús

Agradecimientos.

Quisiera comenzar expresando mi más sincero agradecimiento a Orlando Villamayor. Para mí ha sido placer y un privilegio trabajar bajo su dirección; a parte de su talla investigadora, he de destacar aquí su inmensa valía como ser humano, sus consejos, su paciencia y su comprensión.

A mis padres les debo el haberme enseñado a luchar por aquellas cosas que merecen la pena en la vida. También les agradezco el enorme esfuerzo que siempre han hecho para poder ofrecernos lo mejor, tanto a mí como a mis hermanos.

A mi hermana Chary le doy las gracias por tantas cosas ... ; pero muy especialmente por una: ella me convenció para enrolarme en la aventura del doctorado, y me ayudó a iniciarla.

A mi hermano Antonio, por sus ánimos y sus “buenas suertes”, y el haber sido durante muchos años mi mejor compañero de estudios.

A Sole, Jesús, Julián y Belén, por ser tan buenos amigos.

Al Departamento de Matemáticas de la U.A.M., por los medios y oportunidades que me ha ofrecido para llevar esta tesis a buen término. Y de forma muy señalada al lector, Adolfo Quirós, por haber leído tanto y con tanto cuidado, por sus comentarios, sugerencias y correcciones. También agradezco a los compañeros del departamento su amistad durante esta etapa de mi vida.

Y a Jesús, mi marido, por cada día ...

A todos, muchísimas gracias.

Índice

0	Introducción	1
0.1	Fibrados canónicos e ideales jacobianos.	iii
0.2	Ideales jacobianos y desingularización inmersa.	vi
0.3	Fibrados canónicos en el contexto aritmético.	xii
0.4	Descripción del contenido de la tesis.	xvii
0.4.1	Capítulo 2. Morfismos casi-lisos.	xvii
0.4.2	Capítulo 3. Superficies regulares inmersas.	xxvi
0.4.3	Capítulo 4. Exponentes idealísticos y superficies aritméticas.	xxxiii
1	Preliminares	1
1.1	Módulos de diferenciales.	1
1.2	Álgebras de diferenciales.	5
1.3	Los ideales de Fitting de un módulo	12
1.4	Anillos locales completos.	14
1.5	Anillos excelentes.	16
1.6	Conjuntos construibles.	18
2	Morfismos casi-lisos.	20
2.1	Introducción y notación.	20
2.2	Módulo de Diferenciales con Polos Loga- rítmicos.	24
2.3	Morfismos casi-lisos.	27
2.4	Cambios de base étale.	30
2.5	Fibrados tangentes.	35
2.6	Morfismos casi-lisos y explosiones.	40
2.7	El Ideal Jacobiano.	53
2.8	Casi-lisitud para subesquemas inmersos.	70

2.9	Inclusión de centros permisibles y estabilidad por explosiones.	81
2.10	Permisibilidad para curvas verticales.	93
3	Superficies regulares inmersas.	104
3.1	Introducción y notación.	104
3.2	Permisibilidad geométrica para superficies.	107
3.3	El ideal jacobiano de superficies geoméricamente permisibles.	116
3.4	Explosiones en curvas permisibles.	122
3.5	La función F_S	130
3.6	Demostración del Teorema 3.1.2.	148
4	Exponentes idealísticos y superficies aritméticas.	160
4.1	Introducción y notación.	160
4.2	Reducción al caso de superficies genéricamente lisas.	168
4.3	El Ideal de Coeficientes.	175
4.4	El Índice asociado al Ideal de Coeficientes.	187
4.5	La Parte Inicial del Ideal de Coeficientes.	194
4.6	Las componentes de altura 1 del Ideal de Coeficientes.	200
4.7	Demostración del Teorema 4.1.3	206
5	Índice de términos.	225
6	Bibliografía.	227

Introducción.

0.1 Fibrados canónicos e ideales jacobianos.

La regularidad y la lisitud son conceptos equivalentes al tratar con variedades sobre cuerpos perfectos. En efecto, sea W una variedad de dimensión n sobre un cuerpo perfecto \mathcal{K} . En este caso las siguientes condiciones son equivalentes:

- i. Para cada punto cerrado $x \in W$ el anillo $\mathcal{O}_{W,x}$ es regular.
- ii. El morfismo

$$W \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{K})$$

es un morfismo liso.

- iii. El haz de \mathcal{O}_W -módulos $\Omega_{W/\mathcal{K}}^1$ es localmente libre de rango n .

Si W es una variedad lisa sobre un cuerpo perfecto, entonces el haz de módulos de diferenciales es localmente libre. Por lo tanto si W es una variedad lisa, entonces es regular y además podemos asociarle un fibrado canónico inducido por el haz de módulos localmente libre.

Sea ahora $Z \subset W$ un subesquema cerrado irreducible de codimensión t . Entonces existe una sucesión exacta (la segunda sucesión exacta fundamental),

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \Omega_{W/\mathcal{K}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/\mathcal{K}}^1 \longrightarrow 0 \quad (0.1)$$

que relaciona el haz de diferenciales sobre W con el haz de diferenciales sobre Z . Si W es liso sobre \mathcal{K} entonces el \mathcal{O}_Z -módulo

$$\Omega_{W/\mathcal{K}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$$

es localmente libre de rango n , y Z es liso sobre \mathcal{K} (i.e. regular) si y sólo si $\Omega_{Z/\mathcal{K}}^1$ es un \mathcal{O}_Z -módulo localmente libre de rango $n - t$.

Utilizando la derivación d podemos definir el Ideal Jacobiano de Z , Δ_Z , como el haz de Ideales de Fitting de orden t asociados a la imagen de d en la sucesión exacta fundamental (0.1).

El ideal jacobiano Δ_Z tiene una doble lectura:

- i. Ilustra la obstrucción existente para que el morfismo restringido

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{K}),$$

sea liso.

- ii. Permite describir el conjunto de puntos en los que Z no es regular, ya que

$$\text{Sing}(Z) = V(\Delta_Z).$$

De todo este desarrollo podemos extraer la siguiente conclusión:

Si W es un esquema liso sobre un cuerpo perfecto entonces podemos asociarle un fibrado canónico, inducido por el haz de módulos de diferenciales. Este fibrado es de fundamental importancia a la hora de describir el lugar singular de cualquier subesquema cerrado $Z \subset W$.

Pasemos ahora al contexto aritmético. Sea Y un esquema de Dedekind. Por ejemplo $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ o $Y = \text{Spec}(\mathcal{D})$, donde \mathcal{D} es el anillo de enteros en un cuerpo de números. Sea W un esquema íntegro, de dimensión n , y

$$\pi: W \longrightarrow Y,$$

un morfismo separado y de tipo finito sobre Y . Al igual que sucede en el caso de variedades, si W es un esquema liso sobre Y entonces es posible asociarle un fibrado canónico inducido por el haz de diferenciales relativo.

Sea $Z \subset W$ un subesquema cerrado de codimensión t . La sucesión exacta:

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \Omega_{W/Y}^1 \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y}^1 \longrightarrow 0 \quad (0.2)$$

permite relacionar el haz de diferenciales de W con el de Z . Puesto que W es liso sobre Y , el \mathcal{O}_Z -módulo

$$\Omega_{W/Y}^1 \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$$

es localmente libre de rango $n - 1$, y Z será liso sobre Y si y sólo si $\Omega_{Z/Y}^1$ es un \mathcal{O}_Z -módulo localmente libre de rango $n - t - 1$.

Como en el caso de variedades sobre cuerpos perfectos, la derivación d nos permite definir el Ideal Jacobiano Δ_Z de Z , como el haz de Ideales de Fitting de orden t asociados a la imagen de d en la sucesión exacta fundamental (0.2).

De este modo, el ideal jacobiano Δ_Z detecta el conjunto de puntos para los que el morfismo restringido

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y,$$

no es liso. El cerrado $V(\Delta_Z)$ contiene al lugar singular de Z , y en general esta inclusión es estricta.

Ejemplo 0.1.1

Sean $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y

$$\pi: W \longrightarrow Y$$

el morfismo inducido por la inclusión natural

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x].$$

W es claramente un esquema liso sobre Y . Sea $Z \subset W$ la curva correspondiente al ideal

$$\mathcal{I}(Z) = \langle p - x^2 \rangle,$$

donde $p \in \mathbb{Z}$ es un primo. Si $z \in Z$ es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal $\langle p, x \rangle$ y si $p \neq 2$ entonces

$$\Delta_{Z,z} = \langle x \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)_z \neq \mathcal{O}_{Z,z}.$$

Sin embargo, Z es un esquema regular en el punto z .

Esta patología tiene una explicación: sobre el punto cerrado $y \in Y$ correspondiente al ideal maximal $\langle p \rangle$ la fibra del morfismo restringido

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y,$$

no es lisa. En efecto, si $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/\langle p \rangle$, entonces la fibra de $\pi|_Z$ sobre el punto y viene dada por el morfismo:

$$\mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]/\langle x^2 \rangle,$$

que no es liso.

En este contexto podemos concluir que:

Si W es un esquema liso sobre un esquema de Dedekind Y , le podemos asociar de manera canónica un fibrado. Sin embargo el papel de este fibrado en el contexto de los esquemas aritméticos no es comparable con el que juega en el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos. Si $Z \subset W$ es un subesquema cerrado, el ideal jacobiano de Z determina, en general, un cerrado más grande que el lugar singular de Z .

Lo que sí sucede es que para cada punto cerrado $y \in Y$, la restricción del jacobiano de Z a la fibra sobre y , $\Delta_Z|_{\pi^{-1}(y)}$, es el jacobiano de la restricción de Z a $\pi^{-1}(y)$. Por lo tanto Δ_Z describe el lugar singular de las fibras del morfismo $\pi|_Z$.

0.2 Ideales jacobianos y desingularización inmersa.

Resolución de singularidades.

Sea X un esquema irreducible. Definimos el subconjunto de X

$$X_{\text{reg}} = \{x \in X : \mathcal{O}_{X,x} \text{ es regular} \},$$

y su complementario, el lugar singular de X , como

$$\text{Sing}(X) = X - X_{\text{reg}}.$$

Una *desingularización* de X es un morfismo propio y birracional,

$$e : X_1 \longrightarrow X$$

tal que:

- El morfismo inducido,

$$e : e^{-1}(X_{\text{reg}}) \longrightarrow X_{\text{reg}}$$

es un isomorfismo y

- X_1 es un esquema regular.

Si X es una variedad algebraica sobre un cuerpo de característica cero, entonces existe una desingularización de X (cf.[Hil]). En este caso, se prueba la existencia de una secuencia finita de explosiones,

$$\begin{array}{ccccccc} X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ Y_N & & & & Y_1 & & Y_0 \end{array}$$

con centros regulares $Y_i \subset \text{Sing}(X_i)$, (X_i denota el transformado estricto de X_{i-1}), de modo que X_N es regular (i.e. $\text{Sing}(X_N) = \emptyset$).

Se pueden obtener desingularizaciones utilizando otras estrategias. Por ejemplo, si X es un esquema excelente de dimensión 2 en [Li] o [Ab] se prueba que se puede obtener una desingularización de X explotando en puntos y normalizando, de manera reiterada.

Resolución Inmersa de Singularidades.

Sea \mathcal{K} un cuerpo perfecto y $W \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{K})$ un morfismo liso. Si ahora consideramos la explosión de W en un centro regular

$$e : W_1 \longrightarrow W,$$

entonces W_1 es un esquema regular y por tanto liso sobre \mathcal{K} .

Podemos enunciar esta propiedad del siguiente modo:

La explosión de un esquema liso sobre un cuerpo perfecto \mathcal{K} en un centro liso, es de nuevo un esquema liso sobre \mathcal{K} , y por tanto la clase de los esquemas lisos sobre \mathcal{K} es cerrada por explosiones en centros lisos.

Recordemos que un conjunto de subesquemas cerrados $\{H_1, \dots, H_r\} \subset W$ tiene *cruzamientos normales* si para todo punto cerrado $x \in W$, existe un sistema regular de parámetros, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{O}_{W,x}$, tal que para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ con $x \in H_i$, existen subíndices $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$H_i = V(\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle).$$

Si $W \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{K})$ es una variedad lisa de dimensión n sobre un cuerpo perfecto \mathcal{K} , podemos asociarle un fibrado tangente, definido a partir del haz de diferenciales relativo $\Omega_{W/\mathcal{K}}^1$. Este fibrado es un poderoso instrumento, que permite:

- Determinar el lugar singular de un subesquema cerrado $Z \subset W$.
- Determinar el tipo de centro de explosión por el que se preserva la noción de lisitud.

En este marco, suele proponerse la siguiente noción de desingularización inmersa para esquemas sobre cuerpos perfectos:

Sea $W \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{K})$ un esquema liso sobre un cuerpo perfecto \mathcal{K} , y $X \subset W$ un subesquema cerrado e irreducible. Una desingularización inmersa de X es un morfismo propio y birracional,

$$\begin{array}{ccc} e: & W_1 & \longrightarrow W \\ & \cup & \cup \\ & X_1 & \longrightarrow X \end{array}$$

de modo que:

- W_1 es liso sobre el cuerpo \mathcal{K} .
- El morfismo inducido

$$e: e^{-1}(X_{\text{reg}}) \longrightarrow X_{\text{reg}}$$

es un isomorfismo.

- El conjunto $e^{-1}(\text{Sing}(X))$ es una unión de hipersuperficies con cruzamientos normales en W_1 .
- X_1 es regular, y tiene cruzamientos normales con $e^{-1}(\text{Sing}(X))$.

De este modo, una resolución inmersa de singularidades podría alcanzarse, por ejemplo, con una secuencia finita de explosiones,

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \\ X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \end{array}$$

con centros Y_i , de modo tal que:

- Para $i = 0, \dots, N-1$, Y_i es regular, e $Y_i \subset e_i^{-1} \circ \dots \circ e_1^{-1}(\text{Sing}(X))$.
- W_N es liso, (i.e. regular).
- X_N es liso sobre \mathcal{K} , (i.e. regular).
- Si E'_i denota el divisor excepcional correspondiente a la explosión con centro Y_{i-1} , y E_i denota el transformado estricto del mismo en W_N , entonces el conjunto

$$\{E_1, \dots, E_N, X_N\}$$

es un conjunto de subesquemas cerrados con cruzamientos normales.

En [Hi1] se demuestra la existencia de una resolución inmersa de singularidades, cuando la característica del cuerpo base \mathcal{K} es cero, y en [V1], se presenta un algoritmo teórico que permite una construcción explícita de los centros Y_i .

Quisieramos subrayar, una vez más, que si W es una variedad lisa sobre un cuerpo perfecto y $Z \subset W$ es un subesquema cerrado, el jacobiano de Z nos permite encontrar ecuaciones que describen el lugar singular de Z , a partir de las ecuaciones que definen la subvariedad. En este contexto el ideal jacobiano es naturalmente el ideal asociado al lugar singular de Z . En esta línea se describen los algoritmos teóricos de desingularización en los que las ecuaciones que definen los centros Y_i se determinan a partir de las ecuaciones que definen la subvariedad.

El contexto aritmético.

Sea Y un esquema de Dedekind de característica cero, y sea

$$X \longrightarrow Y$$

un esquema sobre Y .

Tal y como ya hemos indicado, existe una desingularización de X si X es un esquema excelente y su dimensión de X es menor o igual que 2 (cf. [Li], [Ab]). Sin embargo, esta desingularización no es inmersa.

Nos preguntamos si existe una desingularización inmersa de X tal como la hemos definido para subesquemas inmersos en esquemas lisos sobre cuerpos perfectos. Ésto es, sea $W \longrightarrow Y$ un morfismo separado de tipo finito, y liso sobre un esquema de Dedekind Y , y sea $X \subset W$ un subesquema cerrado e irreducible. Si definimos una secuencia de explosiones en centros regulares para desingularizar X , la regularidad del medio ambiente se conserva, pero no así la lisitud.

Las nociones de lisitud y regularidad no son equivalentes como en el caso de los cuerpos perfectos. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.2.1

Sea $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, sea $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y sea

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

el morfismo natural inducido por la inclusión $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$. Claramente, $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo liso sobre Y .

Consideremos el punto cerrado $Z = V(< x, p >)$, donde $p \in \mathbb{Z}$ es un primo, y sea

$$e : W_1 \longrightarrow W$$

la explosión con centro Z .

Analizando, por ejemplo, la carta

$$B = \mathbb{Z}[x] \left[\frac{p}{x} \right] = \mathbb{Z}[x, t] / < tx - p > .$$

observamos que en $\text{Spec}(\mathcal{B})$, el módulo de diferenciales $\Omega_{\mathcal{B}/\mathbb{Z}}^1$ está generado por los elementos

$$\{dx, dt\},$$

vinculados por la relación

$$tdx + xdt = 0.$$

En consecuencia, resulta que $\Omega_{\mathcal{B}/\mathbb{Z}}^1$ es un \mathcal{B} -módulo libre de rango 1 en todos los puntos cerrados de $\text{Spec}(\mathcal{B})$, salvo en el punto $V(< x, t >)$, donde el rango es 2. Sea $q \in Y$ el punto cerrado correspondiente al ideal maximal $< p >$. Obsérvese que la fibra del morfismo π sobre el punto q (formada por la unión de dos curvas con cruzamientos normales) no es lisa sobre q .

Hemos comprobado, con un sencillo ejemplo, que la noción de lisitud sobre \mathbb{Z} no se preserva por explosiones en centros regulares.

Si un esquema es liso sobre un esquema regular, entonces es regular, pero la afirmación recíproca no es válida.

Cabe destacar que mientras la regularidad es un concepto intrínseco al esquema, la lisitud, en cambio, es un concepto relativo. El ejemplo 0.2.1 ilustra que en este contexto la lisitud no es estable por explosiones en centros regulares. De hecho, este ejemplo se puede generalizar al caso en que Y es cualquier dominio de Dedekind.

Podemos concluir por tanto que la clase de los esquemas lisos sobre un esquema de Dedekind Y no es cerrada por explosiones en centros regulares. En particular este hecho nos induce a pensar que una desingularización inmersa para esquemas aritméticos quizá deba plantearse en términos diferentes de los que se aplican en el caso de variedades sobre cuerpos perfectos.

Por analogía con el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos quisiéramos obtener:

- Una clase de esquemas que sea cerrada por explosiones en centros convenientemente escogidos.
- Una clase de esquemas sobre los que se pueda introducir una noción de ideal jacobiano en analogía con el caso de variedades sobre cuerpos.

Recordemos el papel que juega el ideal jacobiano en el contexto de variedades lisas sobre cuerpos de característica 0:

- Permite describir el lugar singular de cualquier subesquema inmerso.
- Permite construir de manera explícita los centros de explosión.
- Una clase de centros de explosión suficientemente amplia, que desde luego debe incluir a los puntos cerrados.

Resumen.

La exposición llevada a cabo hasta el momento se puede resumir del siguiente modo:

- Si W es una variedad lisa sobre un cuerpo perfecto (y por tanto regular) podemos asociarle un fibrado canónico. Sin embargo, si W es un esquema regular sobre un dominio de Dedekind, en principio no es obvio que haya un modo canónico de asociarle a W un fibrado que no sea el que trivialmente induce el haz estructural.
- Si $X \subset W$ es un subesquema inmerso en un medio ambiente liso sobre un esquema de Dedekind Y , el subesquema cerrado determinado por el ideal jacobiano de X no se corresponde, en general, con su lugar singular. A diferencia de lo que sucede en el caso de variedades sobre cuerpos perfectos, no conocemos el modo de describir el lugar singular a partir de las ecuaciones que definen a Y .
- La clase de los esquemas lisos sobre esquemas de Dedekind no es cerrada por explosiones en centros regulares.

0.3 Fibrados canónicos en el contexto aritmético.

Sea Y un esquema de Dedekind de característica 0. Durante el desarrollo de esta memoria siempre supondremos que $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ o $Y = \text{Spec}(\mathcal{D})$, donde \mathcal{D} es el anillo de enteros en un cuerpo de números. Queremos definir una

clase de esquemas sobre Y a los que podamos asociar un *fibrado canónico*, en el mismo sentido que se hace cuando tratamos con variedades lisas sobre cuerpos.

Con este propósito, se introdujo en [V3] la noción de *morfismo casi-liso*. Esta noción permite desarrollar una teoría de modo que:

- i. Todo esquema liso es casi-liso.
- ii. Todo esquema casi-liso está provisto de un fibrado *canónico*.
- iii. La clase de esquemas casi-lisos es cerrada por explosiones en centros convenientemente escogidos. Estos centros recibirán el nombre de *centros permisibles* e incluirán a los puntos cerrados.

La idea subyacente es la siguiente:

Supongamos que W es un esquema íntegro y regular de dimensión n . Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo separado, plano y de tipo finito. Consideremos el cuerpo de cocientes \mathcal{F} de Y , y sea

$$\pi_{\mathcal{F}} : W_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{F}),$$

el morfismo inducido. Como W es un esquema regular, $W_{\mathcal{F}}$ también lo es, y puesto que la característica de \mathcal{F} es cero, $W_{\mathcal{F}}$ es liso sobre \mathcal{F} . En otras palabras, el haz de módulos de diferenciales relativo $\Omega_{W_{\mathcal{F}}/\mathcal{F}}^1$ es localmente libre de rango $n - 1$, por lo que induce un fibrado tangente de rango $n - 1$ sobre $W_{\mathcal{F}}$.

Existe, por tanto, un abierto no vacío $U \subset Y$ tal que el morfismo restringido

$$\pi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$$

es liso. En particular, sobre cada punto cerrado $y \in U$ la fibra del morfismo es una hipersuperficie regular.

Sea $F = Y - U$. Obsérvese que F es un conjunto finito de puntos. Lo que haremos a continuación, es imponer una condición geométrica a las fibras sobre los puntos de F . Para cada punto cerrado $Q \in F$, pediremos que la fibra $\pi^{-1}(Q)$ sea una unión finita de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales. En estas condiciones definimos el haz de *diferenciales con polos logarítmicos* a lo largo de las fibras del morfismo $\pi : W \rightarrow Y$. Diremos que

$\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso si este haz es localmente libre de rango $n - 1$.

Observaremos que en estas condiciones:

- El dual del haz de módulos de diferenciales con polos induce *campos vectoriales tangentes* a cada una de las componentes de las fibras del morfismo π .
- El haz de módulos de diferenciales con polos permite asociar de manera *canónica* un fibrado a cada esquema casi-liso.

Los módulos de diferenciales con polos se relacionan por primera vez con el estudio de las singularidades en los trabajos de Giraud ([Gi4] y [Gi5]). En ellos se estudian las singularidades de esquemas de dimensión 2 sobre cuerpos de característica positiva. Estudios similares, pero en dimensión 3, aparecen en [Cs].

Otro contexto en el que aparecen los módulos de diferenciales con polos vinculados a las singularidades es en el estudio de las singularidades de campos vectoriales de dimensión 2 y 3, [Ca1] y [Ca2].

La noción de morfismo casi-liso aparece vinculada a la resolución de singularidades de familias de esquemas en [V4] y [En].

Ilustraremos la definición de morfismo casi-liso con algunos ejemplos:

Ejemplo 0.3.1

Sean $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y el morfismo natural

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

Este morfismo es liso, en particular es casi-liso. La fibra sobre cada punto cerrado $p \in Y$, viene dada por el espectro de un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo perfecto de característica p :

$$\text{Spec}(\mathbb{F}_p[x]) = H.$$

El módulo de diferenciales $\Omega^1_{\mathbb{Z}[x]/\mathbb{Z}}$ está generado globalmente por el elemento $\{dx\}$, y su dual por $\{\frac{\partial}{\partial x}\}$.

Como $\mathcal{I}(H)$ es el ideal generado por p en $\mathbb{Z}[x]$ y

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

se observa que

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{I}(H) \subset \mathcal{I}(H),$$

y por lo tanto el haz de derivaciones $\left(\Omega_{\mathbb{Z}[x]/\mathbb{Z}}^1\right)^*$ induce un campo tangente a H . En otras palabras, $\frac{\partial}{\partial x}$ induce $\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{F}_p[x]$.

Ejemplo 0.3.2

Sea $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x, y]/\langle p - xy \rangle)$, donde $p \in \mathbb{Z}$ es un primo. Sea $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y consideremos el morfismo natural

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

El módulo de diferenciales $\Omega_{W/Y}^1$ está generado por los elementos $\{dx, dy\}$, vinculados por la relación:

$$ydx + xdy = 0.$$

Por lo tanto, este morfismo es liso en todos los puntos de W salvo en el punto correspondiente al ideal maximal $\langle x, y \rangle$.

Sobre los puntos cerrados de Y diferentes del punto correspondiente al ideal primo $\langle p \rangle$, las fibras del morfismo son curvas regulares sobre cuerpos perfectos.

A continuación, describimos la fibra sobre el punto correspondiente al ideal maximal $\langle p \rangle$:

$$\pi^{-1}(p) = \text{Spec}(\mathbb{F}_p[x, y]/\langle xy \rangle).$$

En consecuencia, la fibra sobre p , esta formada por dos curvas regulares con cruzamientos normales.

A lo largo de la fibra sobre p , el módulo de diferenciales con polos está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dx}{x}, \frac{dy}{y} \right\},$$

vinculados por la relación:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Esta relación nos permite concluir que el módulo de diferenciales con polos es localmente libre de rango 1.

En este caso, el módulo dual $\omega(\pi)^*$ está generado por el elemento $\{x \frac{\partial}{\partial x}\}$, que se anula a lo largo de las dos componentes de la fibra sobre p , por lo que induce campos tangentes a cada una de las componentes de la fibra.

Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sea $Z \subset W$ un subesquema cerrado y plano sobre Y . Se puede definir una sucesión exacta, en analogía con la segunda sucesión exacta fundamental (0.1), y una derivación:

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \omega(E) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0, \quad (0.3)$$

que nos permiten construir un ideal jacobiano Δ_Z asociado a Z ([V3, §.4]).

La condición

$$\Delta_Z = \mathcal{O}_Z,$$

garantiza que el subesquema Z tiene cruzamientos normales, simultáneamente, con todas las componentes de cada una de las fibras del morfismo. Además, al igual que en el caso de esquemas lisos sobre cuerpos perfectos, esta misma condición también nos garantiza que el morfismo restringido

$$\pi|_Z : Z \longrightarrow Y$$

es casi-liso. Más aún, si

$$e : W_1 \longrightarrow W$$

es la explosión con centro Z , entonces W_1 es un esquema casi-liso sobre Y , [V3, Teoremas 3.9,y 4.3]. En este caso diremos que Z es un centro *permisible* para $\pi : W \longrightarrow Y$.

De este modo, y por analogía con el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos, nos podríamos plantear una *resolución inmersa*:

Definición 0.3.3 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $X \subset W$ un subesquema cerrado y plano sobre Y . Una *resolución inmersa* de X es una *secuencia de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \end{array}$$

en centros “permisibles” incluidos en $V(\Delta_{X_i})$, (X_i el transformado estricto de X_{i-1}), de modo que

$$\Delta_{X_N} = \mathcal{O}_{X_N},$$

i.e. X_N es casi-liso sobre Y .

Si $Z \subset W$ es un subesquema de dimensión 1, irreducible y plano, entonces existe una resolución inmersa de Z en el sentido que acabamos de definir, ([V3, Proposición 4.5]).

En resumen, la noción de morfismo casi-liso es un instrumento que nos permite definir un fibrado vectorial que, en el contexto aritmético, juega un papel análogo al inducido por el haz de diferenciales relativo en el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos. El objeto de buena parte de esta memoria será el estudio de este tipo de fibrados, con particular interés en el caso de esquemas aritméticos de dimensión 2.

En este sentido mencionamos que casi todos los invariantes introducidos en esta memoria, junto con los resultados desarrollados en el Capítulo 4, están motivados por una posible consecución de una desingularización inmersa de superficies en el caso aritmético.

0.4 Descripción del contenido de la tesis.

Estructuramos esta memoria en cuatro capítulos. En el primero de ellos exponemos algunas definiciones y resultados preliminares que serán de utilidad más adelante. Exponemos a continuación el contenido de los capítulos restantes.

0.4.1 Capítulo 2. Morfismos casi-lisos.

Dedicamos esta primera parte de la tesis al estudio de las propiedades de los morfismo casi-lisos. Fundamentalmente nos centraremos en los siguientes puntos:

- Presentación de los objetos con los que vamos a trabajar: ciertos esquemas regulares que llamaremos *esquemas casi-lisos*.

- Presentación de una clase de morfismos propios a definir entre los objetos mencionados. Esos morfismos propios se definen como una composición de ciertas transformaciones monoidales. Concretamente presentamos una clase de centros de modo que la explosión de un esquema casi-liso en uno de estos centros vuelve a tener estructura de morfismo casi-liso.

Parte del trabajo que llevamos a cabo en este capítulo está dedicado a ampliar la clase de centros permisibles tal como se introdujo en [V3]. Este hecho nos permitirá el desarrollo de los capítulos posteriores.

Los objetos.

Sea Y un esquema de Dedekind de característica 0. En nuestro contexto consideraremos el caso en que $Y = \text{Spec}(\mathcal{D})$ donde \mathcal{D} es el anillo de enteros en un cuerpo de números. Denotaremos por \mathcal{F} al cuerpo de cocientes de \mathcal{D} .

Sea W un esquema regular e íntegro de dimensión d , y sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo separado, plano y de tipo finito sobre Y . Como W es regular existe un abierto no vacío, $U \subset Y$, de modo tal que el morfismo restringido:

$$\pi|_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$$

es liso. En particular para cada punto cerrado $q \in U \subset Y$ la fibra del morfismo:

$$W_q = W \times_Y \{q\}$$

es una hipersuperficie regular.

En este marco, pedimos:

- Primero una condición geométrica:

Que las fibras sobre los puntos de $F = Y - U$ sean una unión finita de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales; denotaremos a este conjunto de hipersuperficies por E .

- Y a continuación una condición algebraica:

Definimos “el haz de módulos de diferenciales con polos” a lo largo de la fibración inducida por el morfismo; exigimos que este haz sea localmente libre de rango $d - 1$, y lo denotaremos por $\Omega(E)$, $\omega(\pi)$, o por $\omega(E)$.

Los morfismos.

Una vez que hemos introducido la clase de los esquemas casi-lisos nos proponemos asociar a esta clase de esquemas una clase de morfismos birracionales y propios.

Consideremos $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Sea $e : W_1 \longrightarrow W$ la explosión de W en un centro regular $Z \subset W$, y sea $\pi_1 = \pi \circ e$. Puesto que W y Z son regulares, el nuevo esquema W_1 también es regular. Nos interesa responder a las siguientes preguntas:

¿Es posible definir un fibrado canónico sobre W_1 a partir del que ya tiene asociado W por ser un esquema casi-liso? En tal caso, ¿qué condiciones debe verificar el centro Z para que W_1 sea esquema casi-liso sobre Y ?

Para responder a estas preguntas volvamos a nuestro punto de partida, cuando introducíamos la noción de morfismo casi-liso. Para que W_1 sea casi-liso sobre Y se debe verificar:

- i. Una condición geométrica: i.e. las fibras del morfismo

$$\pi_1 : W_1 \longrightarrow Y$$

deben ser hipersuperficies regulares con cruzamientos normales. Esta condición se consigue exigiendo que el centro de explosión Z tenga cruzamientos normales con las fibras del morfismo π . Diremos que un centro es *geométricamente permisible* si es irreducible y tiene cruzamientos normales con todas las fibras del morfismo simultáneamente.

- ii. Una condición algebraica: La condición geométrica sobre el centro Z en general no es suficiente para garantizar que el morfismo $\pi_1 : W_1 \longrightarrow Y$ sea casi-liso (véase [V3, Ejemplo 3.10]). Por este motivo pedimos además una condición algebraica. Esta condición se describe en 2.6.8 y en principio *depende* de la presentación local de Z en cada uno de sus puntos cerrados.

Los subesquemas cerrados de W que verifiquen las condiciones descritas en (i) y (ii) recibirán el nombre de *centros permisibles* (Definición 2.6.8).

Diremos que un centro permisible $Z \subset W$ es *horizontal* si el morfismo restringido

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y$$

es plano sobre Y . En caso contrario diremos que Z es *vertical*.

Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.6.10 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sea $Z \subset W$ un centro permisible. Consideremos la explosión:*

$$W_1 \longrightarrow W$$

con centro Z . Entonces W_1 es casi-liso sobre Y .

Resumen.

Hemos definido:

- Una clase de objetos: los esquemas casi-lisos sobre un esquema de Dedekind Y .
- Una clase de morfismos birracionales entre esquemas casi-lisos: las transformaciones monoidales en centros permisibles.

Uno de los resultados principales de este capítulo consistirá en dar una caracterización de los centros permisibles utilizando ideales jacobianos.

Describimos, a continuación, una clase muy particular de centros, los *centros combinatorios*:

Definición 2.6.11 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Para cada punto cerrado $y \in Y$ sea*

$$\pi^{-1}(y) = E_y = \{H_1^y, \dots, H_{r(y)}^y\}.$$

Diremos que $Z \subset W$ es un centro combinatorio si es un subesquema irreducible y existe un punto cerrado $y \in Y$ tal que

$$Z = H_{j_1}^y \cap \dots \cap H_{j_k}^y$$

con $j_i \in \{1, \dots, r(y)\}$ para $i = 1, \dots, k$, y $1 \leq k \leq r(y)$.

Comprobaremos que si $Z \subset W$ es un centro combinatorio entonces:

- i. Z es un centro vertical geoméricamente permisible.
- ii. Z es un centro permisible.

(véase la Observación 2.6.12).

Ideales Jacobianos.

Sean W un esquema regular de dimensión d , $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $Z \subset W$ un subesquema de codimensión t . Por analogía con la segunda sucesión exacta fundamental para módulos de diferenciales, se puede definir una sucesión exacta y una derivación d :

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0, \quad (0.4)$$

donde \mathcal{C} es el conúcleo de la sucesión exacta ([V3, §4.2]).

Puesto que W es un esquema casi-liso, el haz de \mathcal{O}_Z -módulos

$$\omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{O}_Z$$

es localmente libre de rango $d - 1$, y la sucesión exacta (0.4) nos permite definir los ideales de Fitting asociados al conúcleo \mathcal{C} . En este sentido se define en [V3, §4] el ideal jacobiano asociado a un subesquema $Z \subset W$ plano sobre Y .

En este capítulo introducimos la noción de ideal jacobiano tanto para subesquemas horizontales como verticales. Esta noción nos permitirá caracterizar a los centros permisibles en analogía con el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos.

Sea $Z \subset W$ un subesquema vertical e irreducible. Entonces $\pi(Z) = y$, donde y es un punto cerrado en Y . Como $\pi : W \rightarrow Y$ es un morfismo casi-liso, la fibra sobre el punto y se describe como una unión finita de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales:

$$\pi^{-1}(y) = E_y = \{H_1, \dots, H_n\}.$$

Sea

$$l_Z = \#\{H_i \in E_y : Z \subset H_i\}.$$

Nótese que puesto que Z es vertical, $l_Z \geq 1$. En el caso de que Z sea horizontal tiene sentido definir l_Z asignándole el valor 0.

Definición 2.7.5 Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible de codimensión t . Definimos el Ideal Jacobiano de Z como el haz de ideales de Fitting generado localmente por todos los menores de orden $(t - l_Z) \times (t - l_Z)$ de $\text{Im}(d) \subset \omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{O}_Z$ en la sucesión exacta (0.4), y lo denotaremos por Δ_Z .

En [V3, Teorema 4.3] se prueba el siguiente resultado:

Teorema Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible de codimensión t y plano sobre Y . Entonces Z es permisible si y sólo si

$$\Delta_Z = \mathcal{O}_Z.$$

Obsérvese que el teorema anterior da una caracterización de los centros permisibles sólo en el caso horizontal. En esta memoria incluimos una versión más amplia de este teorema en la que caracterizaremos tanto los centros permisibles horizontales como los verticales:

Teorema 2.7.9 Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible de codimensión t . Entonces:

- i. Si $0 \neq \Delta_Z \subset \mathcal{O}_Z$ entonces $\Delta_Z = \mathcal{O}_Z$ si y sólo si Z es un centro permisible (horizontal o vertical).
- ii. Si Z es un centro geoméricamente permisible, y $\Delta_Z = 0$, entonces Z es un centro permisible.

Si Z es un centro permisible con $\Delta_Z = \mathcal{O}_Z$ entonces diremos que Z es un *centro permisible de primera clase*, y si Δ_Z es el haz nulo, diremos que Z es un *centro permisible de segunda clase*.

Obsérvese la analogía con el caso de variedades sobre cuerpos perfectos, ya que la lisitud se conserva por explosiones en centros lisos (i.e. $\Delta_Z = \mathcal{O}_Z$).

Sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible. Fijado un punto cerrado podemos lograr una expresión local de Δ_Z a partir de las ecuaciones que determinan localmente a Z . Del Teorema 2.7.9 extraemos algunas consecuencias inmediatas:

Corolario 2.7.10 *Sea $Z \subset W$ un subesquema cerrado y sea $x \in Z$ un punto cerrado. Entonces Z es un centro permisible de primera o segunda clase en x , independientemente de las ecuaciones escogidas para la presentación local de $\mathcal{I}(Z)_x$. Además, si Z es permisible en un punto cerrado $x \in Z$ entonces existe un abierto $U \subset Z$ con $x \in U$ en el que Z es permisible.*

Subesquemas inmersos y casi-lisitud

Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible y plano sobre Y . Nos preguntamos bajo qué condiciones el morfismo restringido

$$\pi|_Z : Z \rightarrow Y$$

es un morfismo casi-liso.

Nuestra definición de ideal jacobiano, Δ_Z , nos dará condiciones suficientes para que el morfismo

$$\pi|_Z : Z \rightarrow Y$$

sea casi-liso.

Si además Z es un centro permisible (de primera clase) el Teorema 2.7.9 nos asegura que el haz de \mathcal{O}_Z -módulos $\omega(\pi|_Z)$ es localmente libre de rango $d - 1 - t$.

Si W es un esquema liso sobre un cuerpo perfecto \mathcal{K} , $V \subset Z \subset W$ son subesquemas lisos, y

$$W_1 \rightarrow W$$

es la explosión con centro V , entonces el transformado estricto de Z , Z_1 , es liso sobre \mathcal{K} .

Volviendo a nuestro contexto y en analogía con el caso de variedades lisas sobre cuerpos perfectos, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.8.5 *Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Sea $Z \subset W$, un subesquema casi-liso. Entonces un subesquema $V \subset Z$ es un centro permisible para $\pi|_Z : Z \rightarrow Y$ si y sólo si es un centro permisible para $\pi : W \rightarrow Y$. Además V , será permisible de primera o segunda clase para uno de los morfismos si y sólo si lo es para el otro.*

Centros permisibles.

A continuación mencionamos algunos resultados que vienen a completar el resultado ya enunciado en el Teorema 2.8.5:

Teorema 2.9.1 *Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sean $V \subset Z \subset W$ centros (verticales) permisibles para W . Sea*

$$W_1 \rightarrow W$$

la explosión de W con centro V , y sea Z_1 el transformado estricto de Z . Entonces Z_1 es permisible para W_1 .

Proposición 2.9.4 *Sean $W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, $Z \subset W$ un centro permisible y V un centro combinatorio. Consideremos la explosión con centro V*

$$W_1 \rightarrow W$$

y sea Z_1 el transformado estricto de Z . Entonces Z_1 es permisible para W_1 .

Nótese que en esta última proposición no exigimos la condición de que $V \subset Z$ (véase el Ejemplo 2.9.3).

Probaremos además que:

Proposición 2.7.16 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sean $V \subset Z \subset W$ dos centros geoméricamente permisibles. Si existe un punto cerrado $x \in Z$ en el que Z no es permisible, y*

$$\Delta_{Z,x} \subset \mathcal{I}(V) \pmod{\mathcal{I}(Z)}$$

entonces V es un centro permisible.

Obsérvese que la clase de los centros permisibles verifica que:

- i. Todo punto cerrado es permisible.
- ii. Dado un subesquema irreducible $Z \subset W$, existe un abierto no vacío $U \subset Z$ en el que es permisible.
- iii. Si $V \subset Z \subset W$ son centros permisibles, entonces tras la explosión con centro V el transformado estricto de Z es de nuevo un centro permisible.

Curvas verticales.

Finalizamos este capítulo presentando un resultado para curvas verticales:

Proposición 2.10.2 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible de dimensión 1 y vertical sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ Z_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 = Z \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{Z_i})$ (donde Z_i denota el transformado estricto de Z_{i-1}) de modo que Z_N es un centro permisible para $W_N \longrightarrow Y$.

En [V3] se prueba un resultado análogo para curvas horizontales. Recurrirémos a estas dos resultados en el desarrollo de posteriores capítulos.

0.4.2 Capítulo 3. Superficies regulares inmersas.

Sea W un esquema de dimensión 3 y sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. En este capítulo nos interesamos por el estudio de superficies regulares inmersas en W y planas sobre Y . Recordemos que una superficie regular sobre un esquema de Dedekind no es necesariamente lisa. Como muestra presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.4.1

Sean $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x, y])$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ y

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

el morfismo inducido por la inclusión natural:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x, y].$$

Claramente $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo liso sobre Y . Consideremos la superficie $S \subset W$ determinada por el ideal

$$\mathcal{I}(S) = \langle p + x^2 + y^2 \rangle,$$

donde $p \in \mathbb{Z}$ genera un ideal primo. Un sencillo cálculo nos muestra que

$$\Delta_S = \langle \overline{2x}, \overline{2y} \rangle \subset \mathcal{O}_S,$$

donde $\overline{x}, \overline{y}$ denotan la clase de los elementos x e y módulo $\mathcal{I}(S)$. Ésto indica que el morfismo restringido

$$\pi|_S : S \longrightarrow Y$$

no es liso en el punto correspondiente al ideal maximal $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$. Sin embargo S es una superficie regular.

En [V3, Proposición 4.5] se prueba el siguiente resultado:

Proposición *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y Z un subesquema irreducible y reducido de dimensión 1 y plano sobre Y . Entonces existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ Z_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 = Z \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{Z_i})$ (Z_i el transformado estricto de Z_{i-1}) de modo que

$$\Delta_{Z_N} = \mathcal{O}_Z,$$

por lo que Z_N es un centro permisible para $W_N \rightarrow Y$.

Nuestro objetivo es probar un resultado análogo para subesquemas de dimensión 2. Enunciamos aquí el resultado central de este capítulo:

Teorema 3.1.2 *Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, sea W un esquema de dimensión 3, y $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Entonces existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

en centros permisibles $Z_i \subset V(\Delta_{S_i})$, (donde S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}), tal que

$$\Delta_{S_N} = \mathcal{O}_{S_N}.$$

Recordemos que Δ_S mide la obstrucción a que el morfismo restringido:

$$\pi|_S : S \rightarrow Y$$

sea casi-liso. Por lo tanto, la condición $\Delta_{S_N} = \mathcal{O}_{S_N}$ nos garantiza que:

- i. El transformado estricto de S en W_N, S_N , tiene cruzamientos normales con las componentes de las fibras del morfismo

$$\pi_N : W_N \rightarrow Y.$$

- ii. El morfismo restringido

$$\pi_N|_{S_N} : S_N \rightarrow Y$$

es casi-liso.

La mayor dificultad a superar en el desarrollo de la demostración del Teorema 3.1.2 ha consistido en comparar el jacobiano de la superficie S con el de un transformado estricto por explosión en un centro permisible. Este problema nos ha llevado a la búsqueda de nuevos invariantes (i.e. información intrínseca a S y a W) con los que completar la información que ya nos aporta Δ_S .

En la demostración del Teorema 3.1.2 podemos distinguir dos etapas:

• **Etapla 1.**

La primera etapa tiene un claro contenido geométrico. Probamos que tras una secuencia finita de explosiones en centros permisibles se puede lograr que el transformado estricto de S sea *geométricamente permisible*.

Lema 3.2.1 *Sea W un esquema de dimensión 3. Sean $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset S_i$, (donde S_i el transformado estricto de S_{i-1}), de modo que S_N es un centro geométricamente permisible.

Esto significa que S tiene cruzamientos normales con todas las fibras del morfismo $\pi : W \rightarrow Y$. Nótese que bajo estas hipótesis las fibras del morfismo

$$\pi|_S : S \rightarrow Y$$

son curvas regulares con cruzamientos normales. En estas condiciones asociamos a S un haz de módulos de diferenciales con polos $\omega(\pi|_S)$. Sin embargo este haz de módulos no tiene por qué ser localmente libre.

Para la demostración del Lema 3.2.1 utilizaremos una versión débil del Teorema 4.1.3, que probaremos en el Capítulo 4 en un contexto más general.

• **Etapa 2.**

En esta segunda etapa trabajamos con la hipótesis de que S es un centro geoméricamente permisible. Nuestro primer objetivo es buscar invariantes con los que completar la información procedente de Δ_S . Como veremos éstos surgirán al vincular el jacobiano de S con los de ciertas curvas regulares inmersas en la superficie S .

En primer lugar, observamos que la intersección de S con la fibración inducida por el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es una unión de curvas verticales con cruzamientos normales geoméricamente permisibles. Designaremos con el nombre *curva principal* a cada componente irreducible de este conjunto de curvas (3.3.1).

Sea \mathcal{F} el cuerpo de cocientes de Y . Como la superficie S es regular y plana sobre Y , y \mathcal{F} es un cuerpo de característica cero, el morfismo

$$S_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{F})$$

es liso. Por lo tanto, existe un conjunto abierto no vacío $U \subset Y$ de modo tal que el morfismo restringido:

$$\pi|_{S \cap \pi^{-1}(U)} : S \cap \pi^{-1}(U) \rightarrow U$$

es liso. Diremos entonces que S es genéricamente lisa. Ésto significa que existe un número finito de curvas principales $\{C_i\}_{i=1, \dots, m}$ de modo que:

$$V(\Delta_S) \subset \bigcup_{i=1}^m C_i$$

y

$$C_i \cap V(\Delta_S) \neq \emptyset.$$

Este subconjunto de curvas principales recibirán el nombre de *curvas principales singulares* (3.3.1).

En este contexto estamos en condiciones de introducir nuestros nuevos invariantes. Éstos se obtendrán al vincular el jacobiano de S con el de sus curvas principales.

Proposición 3.3.2 Sean W un esquema de dimensión 3, $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible plana sobre Y . Si C es una curva principal de S , entonces

$$\Delta_S|_C = \Delta_C.$$

Este resultado conlleva una serie de consecuencias que describimos en los siguientes corolarios:

Corolario 3.3.3 *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.2 se tiene que:*

- i. *Si una curva principal singular de S es permisible entonces es permisible de segunda clase.*
- ii. *Cualquier componente irreducible de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$ es siempre permisible.*
- iii. *S es un subesquema casi-liso si y sólo si todas sus curvas principales son permisibles de primera clase.*

Corolario 3.3.4 *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.2 existen curvas verticales geoméricamente permisibles $\{C_i\}_{i=1,\dots,m}$ tales que:*

$$V(\Delta_S) = C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^m V(\Delta_{C_i}) \right)$$

donde $\bigcup_{i=k+1}^m V(\Delta_{C_i})$ es un conjunto finito de puntos aislados de $V(\Delta_S)$. Además para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, y para todo punto cerrado $x \in V(\Delta_{C_i})$ se tiene que:

$$\text{ord}_x(\Delta_S) \leq \text{ord}_x(\Delta_{C_i,x}).$$

A la vista de estos resultados la demostración del Teorema 3.1.2 tiene una doble lectura:

- Lograr mediante explosiones en centros permisibles que el jacobiano de el transformado estricto de S sea el haz estructural.
- Lograr mediante explosiones en centros permisibles que todas las curvas principales del transformado estricto de S sean permisibles de primera clase (recordemos que una curva $C \subset W$ es permisible de primera clase si $\Delta_C = \mathcal{O}_C$).

Para nuestro propósito de definir nuevos invariantes nos apoyaremos, simultáneamente, en estas dos interpretaciones.

Las componentes de altura 1 de Δ_S .

La siguiente proposición nos indica que podemos ignorar las componentes de altura 1 del ideal jacobiano de una superficie horizontal geoméricamente permisible:

Proposición 3.4.1 *Sea W un esquema de dimensión 3, sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

con centros en curvas principales $C_i \subset V(\Delta_{S_i})$, (donde S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}) de modo que Δ_{S_N} no tiene componentes de altura 1.

Una cadena de explosiones como la descrita en la Proposición 3.4.1 recibirá el nombre de *proceso de eliminación de componentes de altura 1 del ideal Δ_S* (3.4.2).

Quisiéramos subrayar que en el caso de explosiones en curvas la comparación del jacobiano de S con el de su transformado estricto es tan clara, que permite simplificar la demostración del Teorema 3.1.2 reduciéndola al caso en que sólo tenemos que explotar en puntos cerrados. Sobre los puntos aislados de $V(\Delta_S)$ definimos una función semicontinua superiormente con valor cero en el conjunto $S - V(\Delta_S)$. Denotaremos a esta función por F_S . De este modo la demostración del Teorema 3.1.2 se obtendrá si probamos que el valor

$$\text{Max}(F_S)$$

disminuye por explosiones en centros permisibles. Este resultado se prueba con la siguiente proposición:

Proposición 3.5.4 *Sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible cuyo ideal jacobiano Δ_S no tiene componentes de altura 1. Sea $x \in V(\Delta_S)$ un punto cerrado con*

$$F_S(x) = \text{Max}(F_S).$$

Consideremos la explosión con centro x seguida de un proceso de eliminación de componentes de altura 1:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

Sean S_N el transformado estricto de S en W_N y E_N el divisor excepcional correspondiente a la última explosión. Entonces:

$$\text{Max}(F_{S_N}) \leq \text{Max}(F_S)$$

y si existe un punto cerrado $z \in S_N \cap E_N$ con

$$F_{S_N}(z) = \text{Max}(F_S)$$

entonces:

- i. z es el único punto cerrado en $S_N \cap E_N$ sobre el que la función F_{S_N} toma el valor $\text{Max}(F_S)$.
- ii. z es un punto racional sobre $\mathcal{O}_{W,x}$, sin cruzamiento (i.e. no se encuentra en la intersección de dos curvas principales singulares de S_N).
- iii. Si $C_N = S_N \cap E_N$ entonces,
 - (a) $V(\Delta_{C_N}) = \{z\}$.
 - (b) $\text{ord}_z(\Delta_{S_N,z}) = \text{ord}_z(\Delta_{C_N,x})$.

Para concluir la demostración del Teorema 3.1.2 es suficiente probar que no existe una secuencia infinita de explosiones en centros permisibles:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ & & \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ \dots & \longrightarrow & (S_N, x_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S_1, x_1) & \longrightarrow & (S_0, x_0) = (S, x) \end{array}$$

de modo tal que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$F_{S_i}(X_i) = \text{Max}(F_{S_i}) = \text{Max}(F_S).$$

(Véase (3.6.1)) Obsérvese que en esta secuencia de explosiones ignoramos las componentes de altura 1 del ideal de coeficientes.

Para ello construiremos una curva *formal* regular, C , de modo que si C_i denota el transformado estricto de C_{i-1} en la secuencia de explosiones considerada anteriormente, entonces $x_i \in C_i$. Esta construcción nos obliga a trabajar en el completado $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ y a trasladar a este nuevo contexto toda la información que estamos considerando. Nótese que esta información está relacionada con el módulo de diferenciales con polos. Ésto nos llevará a utilizar algunos resultados que aparecen en [Ku] y que están ligados a criterios de finitud para módulos y álgebras de diferenciales sobre anillos completos.

0.4.3 Capítulo 4. Exponentes idealísticos y superficies aritméticas.

Sean W un esquema de dimensión 3 y $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Consideremos una superficie singular $X \subset W$ plana sobre Y . En este capítulo nos centraremos en el estudio del cerrado de X determinado por los puntos de máxima multiplicidad.

Para cada punto cerrado $x \in X$ sea f_x una ecuación local de X en $\mathcal{O}_{W,x}$. Para cada número natural k se define el conjunto cerrado:

$$\text{Sing}(X, k) = \{x \in X : \text{ord}_x f_x \geq k\}.$$

Consideremos:

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}.$$

Dado un punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b)$ sea $\pi(x) = y \in Y$, donde y es un punto cerrado en Y . Como el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, la fibra sobre el punto cerrado y es una unión finita de superficies regulares con cruzamientos normales, i.e.:

$$E_y = \pi^{-1}(y) = \bigcup_{j=1}^{m(y)} H_j,$$

donde para $j = 1, \dots, m(y)$, H_j es una superficie regular.

Supongamos que $x \in H_j$. Si denotamos por $f_x|_{H_j}$ la restricción de f_x a la superficie H_j en general se tiene que

$$\text{ord}_x f_x|_{H_j} \geq b.$$

En este marco introducimos la siguiente definición:

Definición 4.1.2 Diremos que X es maximalmente transversal al morfismo

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

si para todo punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b)$ y para todo $H_i \in E_{\pi(x)}$ con $x \in H_i$ se tiene que

$$\text{ord}_x f_x|_{H_i} = b.$$

Dado $x \in \text{Sing}(X, b)$ y $H \in E_{\pi(x)}$, diremos que x es maximalmente transversal a la hipersuperficie H , si para todo punto cerrado $y \in \text{Sing}(X, b) \cap H$ se verifica que

$$\text{ord}_y f_y|_H = b.$$

Si X es regular entonces hablaremos simplemente de transversalidad.

Nuestro objetivo es probar el siguiente resultado:

Teorema 4.1.3 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $X \subset W$ una superficie reducida y plana sobre Y . Para cada punto cerrado $x \in X$ sea f_x una ecuación local de X en $\mathcal{O}_{W,x}$, y sea

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}.$$

Existe una secuencia finita de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset \text{Sing}(X_i, b)$ (donde X_i denota el transformado estricto de X_{i-1}), de modo que el morfismo

$$\pi_N = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_N : W_N \longrightarrow Y$$

es casi-liso y, o bien

$$\text{Sing}(X_N, b) = \emptyset,$$

o bien X_N es maximalmente transversal al morfismo π_N .

Motivación del problema.

El desarrollo de la noción de transversalidad está motivado por el hecho de que ésta juega un papel importante en la demostración de la desingularización inmersa de curvas reducidas en un esquema excelente regular de dimensión 2.

Aunque en el sentido de la desingularización nuestros resultados son parciales, el interés de este capítulo se fundamenta en la introducción de una noción de *exponente idealístico* en el contexto aritmético.

Para ilustrar la importancia de la noción de transversalidad maximal recordaremos el papel que juega en la desingularización inmersa de curvas planas.

El caso de curvas.

Sea S una variedad regular de dimensión 2 de tipo finito sobre un cuerpo \mathcal{K} , y sea $T \subset S$ una curva reducida. Para cada punto cerrado $x \in T$ sea

$$\mathcal{I}(T)_x = \langle h_x \rangle,$$

donde h_x es una ecuación local de T en $\mathcal{O}_{S,x}$. Consideremos

$$b = \max\{\text{ord}_x h_x : x \in T\},$$

y

$$\text{Sing}(T, b) = \{x \in T : \text{ord}_x h_x = b\}.$$

Sea $H \subset S$ una curva regular y sea $x \in H \cap T$ un punto cerrado con multiplicidad b para T . Diremos que T es maximalmente transversal a H en el punto x si

$$\text{ord}_x h_x |_H = b.$$

Argumento de transversalidad. Supongamos que T es maximalmente transversal a H en un punto cerrado $x \in \text{Sing}(T, b)$. Sea

$$S_1 \longrightarrow S$$

la explosión con centro el punto x . Sean T_1 y H_1 los transformados estrictos de T y H respectivamente, y sea E el divisor excepcional. Si T_1 tiene un punto excepcional z de orden b , entonces $T_1 \cap E = \{z\}$ y $z \notin H_1$.

Comprobaremos a continuación que el argumento de transversalidad tiene una incidencia importante en la demostración de la existencia de una desingularización inmersa de la curva T :

Supongamos que existe una secuencia infinita de explosiones en puntos cerrados:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \\ & & \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ \dots & \longrightarrow & T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \\ \dots & \longrightarrow & x_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_0 = x \end{array}$$

de modo que para todo $i \in \mathbb{N}$ la multiplicidad de T_i en x_i es b (donde T_i denota el transformado estricto de T_{i-1}). Entonces:

- i. Todos los puntos x_i son racionales sobre $\mathcal{O}_{T,x}$.
- ii. Si E_i denota el divisor excepcional correspondiente a la explosión

$$S_i \longrightarrow S_{i-1}$$

entonces la transversalidad maximal nos garantiza que $x_i \notin E_i \cap E_{i-1}$ (donde por abuso de notación denotamos por E_{i-1} al transformado estricto de E_{i-1} en S_i).

Bajo estas hipótesis se puede construir una curva formal regular $C \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,x})$, cuyos sucesivos transformados estrictos por la secuencia de explosiones anteriormente construida contienen a los puntos x_i . Entonces existe un elemento regular $r \in \hat{\mathcal{O}}_{S,x}$ tal que

$$I(C) = \langle r \rangle,$$

y es fácil comprobar que en tal caso

$$\mathcal{I}(T)\hat{\mathcal{O}}_{S,x} \subset \langle r^b \rangle,$$

lo que contradice el hecho de que T es una curva reducida.

Acerca de la demostración del Teorema 4.1.3

Recordemos que nuestro objetivo es probar el Teorema 4.1.3. Para ello comenzaremos considerando una serie de reducciones que nos permitirán plantear nuestro problema desde una mejor perspectiva.

• Reducción al caso de superficies genéricamente lisas.

Denotemos por \mathcal{F} el cuerpo de cocientes de Y (que recordemos es de característica 0). Entonces

$$X_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$$

es una curva sobre $\text{Spec}(\mathcal{F})$. Tras una secuencia finita de explosiones en puntos cerrados podemos suponer que el transformado estricto de $X_{\mathcal{F}}$ es una curva regular (i.e. lisa sobre \mathcal{F}).

Ahora bien, los puntos en los que explotamos se corresponden con curvas planas sobre Y incluidas en W . Por ejemplo, sean $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y el morfismo

$$\pi : X \longrightarrow Y$$

inducido por la inclusión natural

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x].$$

Consideremos la localización:

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}[x],$$

que induce el morfismo a nivel de espectros:

$$X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}).$$

Obsérvese que todo punto cerrado $r \in X_{\mathbb{Q}}$ da lugar a una curva en X . Por ejemplo sea $r \in X_{\mathbb{Q}}$ el punto cerrado correspondiente al ideal maximal $\langle x^2 - 15 \rangle$. Entonces el ideal

$$\langle x^2 - 15 \rangle \subset \mathbb{Z}[x]$$

determina una curva en X .

Volvamos a nuestro problema original. Una secuencia de explosiones en puntos cerrados sobre $W_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{F})$ induce una secuencia de explosiones en curvas sobre $\pi : W \rightarrow Y$. Estas curvas no tienen por qué ser permisibles en el sentido de la casi-lisitud, por lo que en principio podemos perder las buenas propiedades del medio ambiente del que partíamos.

Para subsanar este obstáculo usaremos el resultado [V3, Prop. 4.5] que ya hemos mencionado con anterioridad. En consecuencia, tras una sucesión finita de explosiones en puntos, podemos suponer que todas las curvas en las que tengamos que explotar son permisibles. Podremos explotar en ellas, sin alterar la casi-lisitud del medio ambiente. Nótese que estos procesos intermedios no afectan a la secuencia de explosiones sobre $\text{Spec}(\mathcal{F})$.

Toda esta discusión nos permite suponer que X es genéricamente lisa sobre Y . Por lo tanto existe un conjunto finito de puntos cerrados en Y , $\{Q_1, \dots, Q_n\}$, de modo que

$$\pi(\text{Sing}(X, b)) = \{Q_1, \dots, Q_n\}.$$

Como suponemos que el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, existe un conjunto de superficies regulares con cruzamientos normales,

$$\{H_1, \dots, H_n\} \subset W$$

tales que

$$\bigcup_{i=1}^n \pi^{-1}(Q_i) = \{H_1, \dots, H_n\}.$$

De este modo existe a lo sumo un conjunto finito de superficies regulares H_i a las que X no es maximalmente transversal.

• Transversalidad y divisores excepcionales.

Si consideramos la explosión

$$e : W_1 \rightarrow W$$

en un centro permisible e incluido en $\text{Sing}(X, b)$ entonces X_1 es maximalmente transversal a E , donde E denota el divisor excepcional y X_1 el transformado

estricto de X . Además la transversalidad es un concepto que se preserva por explosiones en centros permisibles incluidos en $\text{Sing}(X, b)$.

De este modo podemos concluir que la demostración del Teorema 4.1.3, se reduce a *separar* el conjunto $\text{Sing}(X, b)$ de un número finito de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que sólo tenemos que separar los puntos de orden b de X de una superficie regular que denotaremos por G .

Nuestro objetivo, por tanto es probar que existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W & \longrightarrow Y \\ \cup & & & \cup & & \cup & \\ G_N, X_N & \longrightarrow & \dots & G_1, X_1 & \longrightarrow & G_0 = G, X_0 = X & \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset \text{Sing}(X_i, b) \cap G_i$, (donde X_i, G_i denotan los transformados estrictos de X_{i-1} y G_{i-1} , respectivamente), de modo tal que

$$\text{Sing}(X_N, b) \cap G_N = \emptyset.$$

Para tratar este problema, necesitamos medir el *contacto* entre X y G y ser capaces de controlar su comportamiento por explosiones en centros permisibles.

Esta idea nos conduce a la noción de exponente idealístico introducido por Hironaka en [Hi2], [Hi3], [Hi4], [Hi5] y en [AH]. También podemos encontrar referencias a esta noción en los trabajos de Giraud, [Gi1], [Gi2] y [Gi3].

Exponentes idealísticos sobre cuerpos.

Ilustramos a continuación el papel de los exponentes idealísticos en el Teorema de Desingularización de Hironaka.

Sean W un esquema regular de dimensión n sobre un cuerpo \mathcal{K} , y $X \subset W$ una hipersuperficie. Para cada punto cerrado $x \in X$, podemos considerar una ecuación local de X en $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ que denotamos por f_x .

Sea

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\},$$

y sea $x \in \text{Sing}(X, b)$ un punto cerrado.

Por el Teorema de estructura de Cohen para anillos locales completos ([Co], o [Ma]), $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ es isomorfo a un anillo de series formales en n variables con coeficientes en un cuerpo \mathcal{K}' :

$$\hat{\mathcal{O}}_{W,x} \simeq \mathcal{K}'[[x_1, \dots, x_n]],$$

donde $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, y \mathcal{K}' es un cuerpo de coeficientes para el anillo $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$.

Por el Teorema de Preparación de Weierstrass, podemos suponer que f_x es un polinomio en una de las coordenadas x_i (que privilegiamos), con coeficientes en un anillo de series formales en las variables restantes, es decir:

$$f_x = x_n^b + h_1(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{b-1} + \dots + h_b(x_1, \dots, x_{n-1})$$

donde $h_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{K}'[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$, para $i = 1, \dots, b$.

Si suponemos que $b \neq \text{char}(\mathcal{K})$, podemos suponer, después de un cambio de coordenadas adecuado, que $h_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$. En esas condiciones se tiene una expresión para f_x del tipo

$$f_x = x_n^b + h_2(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^{b-2} + \dots + h_b(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Si definimos el ideal $\Delta^i(f_x)$, como el ideal generado por f_x y todas las derivadas de orden menor o igual que i en el anillo de series formales, entonces

$$x_n \in \Delta^{b-1}(f_x).$$

Nótese que

$$\text{Sing}(f_x, b) = V(\Delta^{b-1}(f_x)),$$

y por lo tanto

$$\text{Sing}(f_x, b) \subset V(x_n).$$

Además, existe un resultado, debido a Giraud, que nos dice que si tras la explosión en un centro regular incluido en $\text{Sing}(f_x, b)$, el transformado estricto de f_x tiene algún punto de orden mayor o igual que b , entonces

$$\text{Sing}((f_x)_1, b) \subset V((x_n)_1),$$

donde $(f_x)_1$ denota el transformado estricto de f_x , y $(x_n)_1$ el de x_n .

En tal caso, se dice que $G = V(x_n)$ es una *superficie de contacto maximal* para $\text{Sing}(f_x, b)$, pues contiene los puntos de orden b de f_x , y sus transformados estrictos contienen los puntos de orden b de los transformados estrictos de f_x .

En este sentido, bajar la multiplicidad de f_x por explosiones en centros incluidos en los cerrados de multiplicidad máxima, es equivalente a probar la existencia de una secuencia de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} R_N & \longrightarrow & \dots & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R = \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{W,x}) \\ \cup & & \dots & \cup & & \cup & (*) \\ ((f_x)_N, G_N) & \longrightarrow & \dots & ((f_x)_1, G_1) & \longrightarrow & ((f_x)_0 = f_x, G_0 = G) \end{array}$$

en centros regulares $C_i \subset \text{Sing}((f_x)_i) \cap G_i$ (donde G_i es el transformado estricto de G_{i-1} , y $(f_x)_i$ el de $(f_x)_{i-1}$), de modo que

$$\text{Sing}((f_x)_N, b) \cap G_N = \emptyset.$$

Para resolver este problema Hironaka introduce la noción de exponente idealístico. En este caso, el exponente idealístico de interés se construye a partir de los coeficientes de una determinada expresión formal de f_x : En este contexto es el par formado por el ideal generado por los coeficientes de la ecuación de f_x , equilibrados de manera adecuada:

$$\langle h_2^{\frac{b!}{2}}, \dots, h_b^{\frac{b!}{b}}, x_n \rangle = \mathcal{J} \subset \hat{\mathcal{O}}_{G,x},$$

junto con el número natural $b!$, y se denota por

$$(\mathcal{J}, b!).$$

Este exponente idealístico tiene las siguientes propiedades:

- i. $\text{Sing}(\mathcal{J}, b!) = \text{Sing}(f_x, b) \cap G$.
- ii. Sea $R = \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{W,x})$. Si consideramos la explosión

$$R_1 \longrightarrow R$$

en un centro

$$C \subset \text{Sing}(f_x, b) \cap G,$$

y denotamos por E al divisor excepcional, entonces diremos que la *ley de transformación del exponente idealístico* es

$$(\mathcal{I}(E)^{-b!} \mathcal{J} \mathcal{O}_{R_1}, b!) = (\mathcal{J}_1, b!),$$

pues de este modo si $(f_x)_1$ denota el transformado estricto de f_x y G_1 el de G , entonces

$$\text{Sing}((f_x)_1, b) \cap G_1 = \text{Sing}(\mathcal{J}_1, b!).$$

Se dice que esta explosión es una resolución del exponente idealístico $(\mathcal{J}, b!)$ si

$$\text{Sing}(\mathcal{J}_1, b!) = \emptyset.$$

Probar que existe una secuencia de explosiones como la definida en (*) es equivalente a demostrar que existe una secuencia de explosiones de modo que resolvemos el exponente idealístico:

$$\begin{array}{ccccccc} R_N & \longrightarrow & \dots & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R = \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{W,x}) \\ \cup & & & \cup & & \cup \\ \text{Sing}(\mathcal{J}_N, b!) & \longrightarrow & \dots & \text{Sing}(\mathcal{J}_1, b!) & \longrightarrow & \text{Sing}(\mathcal{J}_0, b!) = \text{Sing}(\mathcal{J}, b!) \end{array}$$

(donde $(\mathcal{J}_i, b!)$ denota el *transformado* del exponente idealístico $(\mathcal{J}_{i-1}, b!)$) tal que

$$\text{Sing}(\mathcal{J}_N, b!) = \emptyset.$$

Nótese que

$$\mathcal{J}_i \subset \mathcal{O}_{G_i}.$$

Podemos resumir toda esta discusión en tres puntos fundamentales:

- i. Hemos considerado una expresión formal de $f_x \in \mathcal{K}'[[x_1, \dots, x_n]]$ en la que hemos privilegiado una variable sobre las demás.
- ii. Esta expresión formal nos permite construir un determinado exponente idealístico.

- iii. Utilizamos el exponente idealístico para encarar el problema de la desingularización de f_x , con la ventaja de que lo haremos sumergidos en una variedad de dimensión menor que la de partida.

Pretendemos desarrollar una estrategia similar en el contexto de los esquemas aritméticos.

Exponentes idealísticos y esquemas aritméticos.

Volvamos de nuevo a nuestro problema inicial. Consideremos un morfismo casi-liso

$$W \longrightarrow Y,$$

donde W es un esquema de dimensión 3, y $X \subset W$ una superficie plana, reducida y genéricamente lisa sobre Y . Sea

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}$$

y definamos

$$\text{Sing}(X, b) = \{x \in X : \text{ord}_x f_x = b\}.$$

Dada una superficie regular $G \subset W$, nuestro objetivo es probar la existencia de una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ (X_N, G_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_1, G_1) & \longrightarrow & (X_0 = X, G_0 = G) \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset \text{Sing}(X_i, b) \cap G_i$, (donde X_i el transformado estricto de X_{i-1} , y G_i el de G_{i-1}), de modo que

$$\text{Sing}(X_N, b) \cap G_N = \emptyset.$$

Sea $x \in \text{Sing}(X, b) \cap G$, un punto cerrado. Emulando la estrategia descrita con anterioridad, consideramos el anillo $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, así como f_x , y z que denotan ecuaciones locales de X y G , respectivamente, en $\mathcal{O}_{W,x} \subset \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$.

Como ocurre en el caso de variedades sobre cuerpos, lo primero que desearíamos hacer es escoger un sistema regular de parámetros en $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, $\{z, x_1, x_2\}$, y expresar f_x como una serie formal, en la que privilegiaríamos la variable z sobre las demás.

Es aquí donde encontramos el primer obstáculo: $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ no es isomorfo a un anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo. En consecuencia, no podemos usar el Teorema de Preparación de Weirstrass para suponer que f_x tiene una expresión formal conveniente.

Llegados a este punto, nos vemos obligados a introducir lo que llamaremos *un conjunto de representantes* (4.1.6). Sea $k_W(x) = \hat{\mathcal{O}}_{W,x}/m(x)$, (donde $m(x)$ denota el ideal maximal de $\mathcal{O}_{W,x}$). Dado $a \in \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ denotaremos por \bar{a} a su clase en $k_W(x)$. Diremos que $\mathcal{S} \subset \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ es un *conjunto de representantes* si verifica las siguientes propiedades:

i. Para cada elemento $c \in k_W(x)$ existe un elemento $s \in \mathcal{S}$ (y sólo uno) tal que $\bar{s} = c$,

ii. $0 \in \mathcal{S}$.

Nótese que \mathcal{S} es sólo un conjunto, y que por lo tanto no es cerrado por operaciones algebraicas elementales como la suma o el producto. La principal dificultad que de este hecho se deriva, es que pretendemos definir *invariantes* (i.e. información independiente de posibles cambios de coordenadas), a partir de expresiones formales que no son compatibles con cambios de coordenadas.

Fijado un conjunto de representantes $\mathcal{S} \subset \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, y un sistema regular de parámetros que contenga a z

$$F = \{z, x_1, x_2\},$$

todo elemento de $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ se escribe de manera única, como una suma (quizá infinita) de monomios en las variables $\{z, x_1, x_2\}$, con coeficientes en \mathcal{S} .

En particular, obtenemos una expresión para f_x ,

$$f_x = c_0 + c_1 z + \dots + c_b z^b + \dots,$$

con c_i una suma (infinita) de monomios en las variables x_1 y x_2 , y con coeficientes en \mathcal{S} .

Con esta información, definimos *el ideal de coeficientes* asociado a F , a una ecuación local de X y a una ecuación local de G (Definición 4.3.7). Este ideal viene dado por:

$$\mathcal{K}_x^F = \langle c_0^{\frac{b!}{b}}, c_1^{\frac{b!}{b-1}}, \dots, c_{b-1}^{\frac{b!}{1}} \rangle \bmod \langle z \rangle \subset \hat{\mathcal{O}}_{G,x}.$$

El objeto

$$(\mathcal{K}_x^F, b!)$$

vendría a ser el equivalente al exponente idealístico de Hironaka mencionado con anterioridad.

Puesto que, como hemos hecho notar, \mathcal{S} es sólo un *conjunto*, y por tanto en principio no es cerrado por operaciones algebraicas, el ideal de coeficientes no es invariante por cambios de coordenadas. Dedicaremos la mayor parte del Capítulo 4 a definir invariantes a partir de $(\mathcal{K}_x^F, b!)$.

Finalmente, en la última sección de este capítulo, probamos que la demostración del Teorema 4.1.3, se puede reducir a probar que existe una secuencia finita de exposiciones en centros permisibles, de modo que

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_x^F, b!) = \emptyset.$$

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo incluimos, para facilitar la lectura de esta tesis, algunos resultados ya conocidos que serán de utilidad mas adelante. Las referencias básicas son [Ma], [Ku], y [ZS2]. Siempre trabajaremos con anillos conmutativos y con unidad.

1.1 Módulos de diferenciales.

Definición 1.1.1 Sea \mathcal{A} un anillo y \mathcal{M} un \mathcal{A} -módulo. Una derivación $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una aplicación aditiva que satisface:

$$D(ab) = aD(b) + bD(a).$$

para todo par de elementos $a, b \in \mathcal{A}$.

Utilizamos la expresión $\text{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ para designar al conjunto de todas las derivaciones de \mathcal{A} en \mathcal{M} . Obsérvese que $\text{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ tiene estructura de \mathcal{A} -módulo de manera natural.

Dada una derivación D , el conjunto $D^{-1}(0)$ es un subanillo de \mathcal{A} , (nótese que la igualdad $1^2 = 1$ implica que $D(1) = 0$). Si además \mathcal{A} es un cuerpo, entonces $D^{-1}(0)$ es un subcuerpo de \mathcal{A} .

Sea k un anillo y \mathcal{A} una k -álgebra. Las derivaciones

$$D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$$

que se anulan en $k \cdot 1_A$ se denominan derivaciones sobre k . El conjunto de dichas derivaciones se denota por $\text{Der}_k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$, empleándose $\text{Der}_k(\mathcal{A})$ en vez de $\text{Der}_k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Dados un anillo k , una k -álgebra \mathcal{A} , y $\mathcal{G} = \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$, considérense los homomorfismos de k -álgebras

$$\varepsilon : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$$

definidos por:

$$\varepsilon(a \otimes a') = aa', \quad \lambda_1(a) = a \otimes 1, \quad \lambda_2(a) = 1 \otimes a.$$

Consideraremos sobre \mathcal{G} la estructura de \mathcal{A} -álgebra determinada por el morfismo λ_1 . Denotaremos por $I_{\mathcal{A}/k}$, o simplemente por I , el núcleo de ε y definimos:

$$I/I^2 = \Omega_{\mathcal{A}/k}^1.$$

Los \mathcal{G} -módulos I, I^2 y $\Omega_{\mathcal{A}/k}^1$ también se pueden interpretar como \mathcal{A} -módulos mediante la aplicación

$$\lambda_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

El \mathcal{A} -módulo $\Omega_{\mathcal{A}/k}^1$ recibe el nombre de módulo de diferenciales de \mathcal{A} sobre k (o diferenciales de Kähler de \mathcal{A} sobre k).

Obsérvese que

$$\varepsilon \lambda_1 = \varepsilon \lambda_2 = \text{id}_{\mathcal{A}}.$$

Si

$$\nu : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/I^2$$

es el morfismo natural y escribimos

$$d^* = \lambda_2 - \lambda_1,$$

entonces $d = \nu d^*$ es una derivación de \mathcal{A} en $\Omega_{\mathcal{A}/k}^1$. Nótese que

$$\mathcal{G} = \lambda_1(\mathcal{A}) \oplus I,$$

por lo que

$$\mathcal{G}/I^2 = \mathcal{G} \oplus \Omega_{\mathcal{A}/k}^1$$

como \mathcal{A} -módulo. Identificando $\nu \lambda_1(\mathcal{A})$ con \mathcal{A} , obtenemos

$$\mathcal{G}/I^2 = \mathcal{A} \oplus \Omega_{\mathcal{A}/k}^1.$$

En otras palabras, \mathcal{G}/I^2 es una extensión trivial de \mathcal{A} por $\Omega_{\mathcal{A}/k}^1$.

Proposición 1.1.2 [Ma, pp. 182-183] *El par $(\Omega_{\mathcal{A}/k}^1, d)$ posee la siguiente propiedad universal: si D es una derivación de \mathcal{A} sobre k en un \mathcal{A} -módulo \mathcal{M} , entonces existe una aplicación lineal única*

$$f : \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \longrightarrow \mathcal{M}$$

tal que $D = fd$.

Como consecuencia de la proposición anterior se obtiene un isomorfismo canónico de \mathcal{A} -módulos

$$\text{Der}_k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{A}/k}^1, \mathcal{M}).$$

La aplicación

$$d : \mathcal{A} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}/k}^1$$

se denomina la derivación canónica y, cuando sea necesario, la denotaremos por $d_{\mathcal{A}/k}$.

Enunciamos a continuación algunas propiedades sobre módulos de diferenciales:

- i. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de morfismos y anillos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \longrightarrow & k' \end{array}$$

Existe un morfismo natural de \mathcal{A} -módulos

$$\Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}'/k'}^1,$$

y por tanto también un morfismo natural de \mathcal{A}' -módulos

$$\Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}'/k'}^1.$$

- ii. Si $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \otimes_k k'$ en (i), entonces el último homomorfismo es un isomorfismo:

$$\Omega_{\mathcal{A}'/k'}^1 = \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_k k' = \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'.$$

- iii. Si \mathcal{S} es un conjunto multiplicativo en una k -álgebra \mathcal{A} y además $\mathcal{A}' = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$, entonces por (ii)

$$\Omega_{\mathcal{A}'/k}^1 = \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' = \mathcal{S}^{-1}\Omega_{\mathcal{A}/k}^1.$$

Teorema 1.1.3 [Ma, p. 186] [La primera sucesión exacta fundamental.] Consideremos los anillos k, \mathcal{A} , y \mathcal{B} y los morfismos

$$k \xrightarrow{\phi} \mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{B}.$$

Entonces

- i. Hay una sucesión exacta de morfismos naturales de \mathcal{B} -módulos

$$\Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \Omega_{\mathcal{B}/k}^1 \xrightarrow{u} \Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}^1 \longrightarrow 0.$$

- ii. La aplicación v tiene inversa a la izquierda si y sólo si toda derivación de \mathcal{A} sobre k en cualquier \mathcal{B} -módulo \mathcal{T} se extiende a una derivación $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T}$.

Corolario 1.1.4 [Ma, p. 187] La aplicación

$$\Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}/k}^1$$

es un isomorfismo si y sólo si toda derivación de \mathcal{A} sobre k en cualquier \mathcal{B} -módulo \mathcal{T} puede extenderse de manera única a una derivación de \mathcal{B} en \mathcal{T} .

Sean k un anillo, \mathcal{A} una k -álgebra, $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ un ideal, y $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \\ x &\longrightarrow d_{\mathcal{A}/k} x \otimes 1 \end{aligned}$$

envía \mathcal{I}^e a 0, por tanto induce una aplicación \mathcal{B} -lineal

$$\delta : \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}.$$

Teorema 1.1.5 [Ma, pp. 187-189] [La segunda sucesión exacta fundamental.] Con la notación precedente, se tiene que:

i. La sucesión de \mathcal{B} -módulos

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \Omega_{\mathcal{B}/k}^1 \longrightarrow 0$$

es exacta.

ii. Sea $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\mathcal{I}^2$. Entonces

$$\Omega_{\mathcal{A}/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \simeq \Omega_{\mathcal{A}_1/k}^1 \otimes_{\mathcal{A}_1} \mathcal{B}.$$

iii. El homomorfismo δ tiene un inverso a la izquierda si y sólo si la extensión

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

de la k -álgebra \mathcal{B} por $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ es trivial sobre k .

Sean \mathcal{R} un álgebra sobre \mathcal{R}_0 , y $d : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ una derivación de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ con $\mathcal{M} = \mathcal{R}d\mathcal{R}$. Sea \mathcal{S} una \mathcal{R} -álgebra.

Definición 1.1.6 [Ku, p. 17] Una derivación $D : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}$ de $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$ en un \mathcal{S} -módulo \mathcal{N} es una extensión de d si existe una aplicación \mathcal{R} -lineal $l : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{d} & \mathcal{S} \\ d \downarrow & & \downarrow D \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{l} & \mathcal{N} \end{array}$$

es conmutativo. Una extensión D de d recibe el nombre de universal si cualquier extensión $\Delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N}'$ de d se puede escribir de manera única como una especialización de D , esto es: existe una única aplicación \mathcal{S} -lineal $\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ tal que $\Delta = \alpha \circ D$.

1.2 Álgebras de diferenciales.

Definición 1.2.1 ([Ku], p. 20) Un álgebra de diferenciales de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ es una \mathcal{R} -álgebra graduada asociativa (en general no conmutativa)

$$\Omega = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n$$

junto con una aplicación \mathcal{R}_0 -lineal

$$d : \Omega \longrightarrow \Omega$$

de grado 1 (i.e. $d(\Omega^n) \subset \Omega^{n+1}$), de modo que se verifican los siguientes axiomas:

- i. $\Omega^0 = \mathcal{R}$, y \mathcal{R} está contenido en el centro de Ω .
- ii. $\Omega = \mathcal{R}[d\mathcal{R}]$ (i.e. como \mathcal{R} -álgebra, Ω está generada por los elementos dr con $r \in \mathcal{R}$).
- iii. Para todo par de elementos $r, r' \in \mathcal{R}$ se tiene que

$$d(rr') = r dr' + r' dr.$$

- iv. Dado un conjunto de elementos $r, r_1, \dots, r_m \in \mathcal{R}$ se tiene que

$$d(r dr_1 \cdot \dots \cdot dr_m) = dr dr_1 \cdot \dots \cdot dr_m.$$

- v. Para cada elemento $r \in \mathcal{R}$, $dr dr = 0$.

La aplicación d recibe el nombre de *diferencial* de Ω , y los elementos de Ω^n se llaman *n-formas*. Para todo anillo \mathcal{R} un álgebra de diferenciales sobre \mathcal{R}/\mathbb{Z} recibe el nombre de *álgebra de diferenciales absoluta*.

Definición 1.2.2 [Ku, p. 25] Sean (Ω, d) y (Ω', d') dos álgebras de diferenciales sobre $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Una aplicación

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

es un homomorfismo de álgebras diferenciales si se cumplen las siguientes condiciones:

- i. φ es un homomorfismo de \mathcal{R}_0 -álgebras.
- ii. φ es compatible con el grado (i.e. para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(\Omega^n) \subset (\Omega')^n$).
- iii. φ es compatible con la diferenciación (i.e. $\varphi \circ d = d' \circ \varphi$).

Álgebra diferencial universal, y extensiones universales de álgebras de diferenciales.

Sean $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ y $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$ dos \mathcal{R}_0 -álgebras, y sea

$$\rho : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{S}$$

un \mathcal{R}_0 -homomorfismo. Si (Ω, d) es un álgebra de diferenciales de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ y (Ω', d') es un álgebra de diferenciales de $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$, existe a lo sumo un homomorfismo de álgebras de diferenciales

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

con $\varphi^0 = \rho$. El homomorfismo φ recibe el nombre de ρ -homomorfismo.

Teorema 1.2.3 [[Ku] p. 37 Existencia del álgebra universal finita] *Dada cualquier álgebra $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ existe un álgebra diferencial $(\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}, d)$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ con la siguiente propiedad: para todo homomorfismo $\rho : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{S}$ de \mathcal{R}_0 álgebras y para toda álgebra diferencial (Ω, δ) de $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$ existe un (único) ρ -homomorfismo $h : \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \longrightarrow \Omega$.*

Proposición 1.2.4 [[Ku] p. 41] *Sea $(\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}, d)$ el álgebra diferencial universal de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Como la \mathcal{R}_0 -derivación*

$$d : \mathcal{R} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}^1$$

es universal, $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}^1$ se puede identificar canónicamente con el módulo de diferenciales de Kähler de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$.

Álgebra diferencial universal finita.

Sea \mathcal{R} un \mathcal{R}_0 álgebra, y (Ω, δ) un álgebra diferencial de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Diremos que Ω es finita si es finitamente generada como \mathcal{R} -módulo. Para ello es suficiente que Ω^1 sea un \mathcal{R} -módulo finitamente generado.

Definición 1.2.5 [[Ku], p.171] *Se dice que el álgebra diferencial Ω es universal finita si cualquier álgebra diferencial finita de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ es la imagen por un homomorfismo de Ω (con respecto a un \mathcal{R} -homomorfismo).*

Si existe un álgebra diferencial universal finita de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$, entonces es única salvo \mathcal{R} -isomorfismos canónicos y la denotaremos por $\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$.

Definición 1.2.6 [[Ku] p.172] *Sea (Ω, δ) un álgebra diferencial de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Sea $\rho : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ un homomorfismo de \mathcal{R}_0 -álgebras. Una ρ -extensión universal finita de Ω es un par $(\tilde{\Omega}_\rho, \tilde{\varphi}_\rho)$, donde $\tilde{\Omega}_\rho$ es un álgebra diferencial finita de $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$ y $\tilde{\varphi}_\rho : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}_\rho$ es un ρ -homomorfismo de modo tal que se cumple la siguiente propiedad universal: si $\psi : \Omega \rightarrow \Omega^*$ es un ρ -homomorfismo arbitrario de Ω en un álgebra diferencial finita Ω^* de $\mathcal{S}/\mathcal{R}_0$, entonces existe un \mathcal{S} -homomorfismo $h : \tilde{\Omega}_\rho \rightarrow \Omega^*$ (que satisface la condición: $\psi = h \circ \tilde{\varphi}_\rho$).*

Definición 1.2.7 [[Ku], p.172] *Sea $\rho : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ un homomorfismo de \mathcal{R}_0 -álgebras y $\delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\delta\mathcal{R}$ una derivación de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Una \mathcal{R}_0 -derivación $d : \mathcal{S} \rightarrow N$ en un \mathcal{S} -módulo N es una ρ -extensión universal finita de δ si se verifican las siguientes condiciones:*

- i. *d es una ρ -extensión de δ y es finita (i.e SdS es finitamente generada);*
- ii. *Si $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow N'$ es una ρ -extensión arbitraria finita de δ , entonces existe exactamente una aplicación \mathcal{S} -lineal $h : N \rightarrow N'$ tal que $\Delta := h \circ d$.*

Si existe la extensión universal finita de δ , entonces la denotamos por $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1$, y la denominamos el *módulo de diferenciales universal finito de $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}$* . Si la derivación δ es la derivación trivial de \mathcal{R} , entonces usaremos $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}^1$ en lugar de $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1$.

Proposición 1.2.8 [Ku], p. 173 Sea (Ω, δ) un álgebra diferencial de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ y sea $\rho : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{S}$ un homomorfismo de \mathcal{R}_0 álgebras. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i. $\overset{\text{sim}}{\Omega}_\rho$ existe.
- ii. Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de submódulos de Ω_ρ^1 tal que Ω^1/U_λ es finitamente generada, y sea $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Entonces Ω_ρ^1/U también es finitamente generada.
- iii. La ρ -extensión universal finita de la derivación $\delta : \mathcal{R} \longrightarrow \Omega^1$ existe.

Si alguna de las condiciones (i)-(iii) se satisface entonces

$$\tilde{\Omega}_\rho = \Omega_\rho / \mathcal{I},$$

donde $\mathcal{I} = (U, dU)$, y $d : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\Omega}_\rho^1$ es la extensión ρ -universal finita de δ :

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1 = \tilde{\Omega}_\rho^1.$$

Proposición 1.2.9 [[Ku], p.175] Sean $\rho : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{S}$ y $\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ dos homomorfismos de \mathcal{R}_0 -álgebras, sea Ω un álgebra de diferenciales de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$, y supongamos que $\tilde{\Omega}_\rho$ existe. En estas condiciones se tiene que:

- i. Si \mathcal{S} es noetheriano y \mathcal{T} es un \mathcal{S} -módulo finito, entonces $\tilde{\Omega}_{\sigma \circ \rho}$ existe y

$$\tilde{\Omega}_{\sigma \circ \rho} = (\tilde{\Omega}_\rho)_\sigma$$

es la σ -extensión universal de $\tilde{\Omega}_\rho$.

- ii. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ un ideal, sea $\mathcal{T} = \mathcal{S}/\mathcal{I}$, y sea σ el homomorfismo canónico

$$\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}.$$

Entonces $\tilde{\Omega}_{\sigma \circ \rho}$ existe y $\tilde{\Omega}_{\sigma \circ \rho} = \tilde{\Omega}_\rho / (\mathcal{I}, d\mathcal{I})$.

Corolario 1.2.10 [[Ku], p. 176] *Bajo las hipótesis de la Proposición 1.2.9, sea $\delta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}\delta\mathcal{R}$ una \mathcal{R}_0 -derivación para la que $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1$ existe. Entonces $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{I}/\delta}^1$ existe y la siguiente sucesión:*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\alpha} \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1 / \mathcal{I} \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1 \xrightarrow{\beta} \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{I}/\delta} \longrightarrow 0$$

es exacta. En este contexto β denota la aplicación functorial inducida:

$$\beta : \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1 \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{I}/\delta}^1$$

y α es la aplicación definida por:

$$\alpha(x + \mathcal{I}^2) = dx + \mathcal{I} \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\delta}^1.$$

Álgebras diferenciales y completación.

Sea \mathcal{R} un anillo, $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ un ideal y (Ω, d) un álgebra diferencial finita de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$. Llamemos $\hat{\mathcal{R}}$ al completado de \mathcal{R} con la topología \mathcal{I} -ádica, y sea $\hat{\Omega} = \hat{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \Omega$. Extendamos d por continuidad a una aplicación

$$\hat{d} : \hat{\Omega} \longrightarrow \hat{\Omega}.$$

Entonces $(\hat{\Omega}, \hat{d})$ es un álgebra diferencial sobre $\hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_0$.

Definición 1.2.11 [[Ku], p. 182] *El álgebra diferencial $(\hat{\Omega}, \hat{d})$ recibe el nombre de completado del álgebra diferencial (finita) (Ω, d) .*

Proposición 1.2.12 [[Ku], p. 183] *Sea $\rho : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{S}$ un homomorfismo de \mathcal{R}_0 -álgebras noetherianas. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ un ideal y $\hat{\mathcal{S}}$ el completado de \mathcal{S} con la topología \mathcal{I} -ádica. Sea $\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \hat{\mathcal{S}}$ el homomorfismo canónico y $\hat{\rho} := \sigma \circ \rho$. Si Ω es un álgebra diferencial sobre $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$ para la cual la ρ -extensión universal Ω_ρ es una álgebra diferencial finita, entonces $\tilde{\Omega}_{\hat{\rho}}$ existe y*

$$\tilde{\Omega}_{\hat{\rho}} = \hat{\Omega}_\rho.$$

Corolario 1.2.13 [[Ku], p. 184] *Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ un ideal y sea $\hat{\mathcal{R}}$ el completado de \mathcal{R} con la topología \mathcal{I} -ádica.*

- i. Si Ω es un álgebra diferencial finita de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_0$, entonces $\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{R}}}$ existe y además

$$\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{R}}} = \hat{\Omega}.$$

- ii. Si $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$ es finita, entonces $\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_0}$ existe y además

$$\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_0} = \hat{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}.$$

El Teorema de estructura de Cohen para anillos locales completos nos dice que todo anillo completo y noetheriano \mathcal{A} , es la imagen por un homomorfismo de un anillo de la forma $\mathcal{R}[[x_1, \dots, x_n]]$, donde \mathcal{R} es un anillo de coeficientes para el anillo \mathcal{A} (los anillos de coeficientes también reciben el nombre de anillos de Cohen). Desarrollaremos estos resultados en la sección 1.4. Sea $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$. Si el anillo \mathcal{A} contiene un cuerpo entonces \mathcal{R} es un cuerpo de coeficientes. En tales casos la descripción de $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}^1$ es en general simple. En el resto de los casos la descripción de $\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}^1$ es un poco más complicada. La Proposición 1.2.14 y los Corolarios 1.2.15 y 1.2.16 nos ofrecen una respuesta en esta dirección.

Proposición 1.2.14 [[Ku], p. 189] *Sea \mathcal{R} un anillo de Cohen que no sea un cuerpo, y sea $\mathcal{S} = \mathcal{R}[[x_1, \dots, x_n]]$. Sea $m = \langle p \rangle$ el ideal maximal de \mathcal{R} y sea $k = \mathcal{R}/m$. Supongamos que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ es un subanillo local con ideal maximal $m_0 = p\mathcal{R}_0$, y tal que $\dim(\Omega_{\mathcal{R}/k_0}^1) < \infty$, donde $k_0 := \mathcal{R}_0/m_0$. Entonces:*

- i. $\mu(\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}^1) = n + \dim_K \Omega_{k/k_0}^1$ (donde $\mu(\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}^1)$ denota el mínimo número de generadores para el \mathcal{S} -módulo $\tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}^1$).

- ii. Si k/k_0 es finitamente generado y $\mathcal{L} := \mathcal{Q}(\mathcal{S})$ entonces

$$\dim_{\mathcal{L}}(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{S}} \tilde{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_0}^1) = n + \text{Trdeg}(k/k_0).$$

Corolario 1.2.15 [[Ku], p. 191] *Bajo las hipótesis de la Proposición 1.2.14 (ii), las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. $\tilde{\Omega}_S^1/\kappa_0$ es un S -módulo libre.

ii. k/k_0 es separable.

Corolario 1.2.16 [[Ku], p. 191] *Sea S un anillo local regular y completo, tal que su cuerpo residual κ es finitamente generado sobre su cuerpo primo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. $\tilde{\Omega}_S^1/\mathbb{Z}$ es un S -módulo libre.

ii. S es isomorfo a un anillo de series formales sobre un anillo de Cohen.

1.3 Los ideales de Fitting de un módulo.

Sea \mathcal{R} un anillo, sea \mathcal{M} un \mathcal{R} -módulo finitamente generado, y sea $\{m_1, \dots, m_n\}$ un sistema de generadores de \mathcal{M} . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow \mathcal{R}^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

donde $\alpha(e_i) = m_i$ para $i = 1, \dots, n$ (e_i denota el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathcal{R}^n). El \mathcal{R}^n -módulo $\ker(\alpha)$ es la *presentación de \mathcal{M} definida por los elementos (m_1, \dots, m_n)* .

Sea $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de generadores de $\ker(\alpha)$ con $v_\lambda = (x_1^\lambda, \dots, x_n^\lambda) \in \mathcal{R}^n$. Entonces la matriz:

$$(x_i^\lambda)_{i=1, \dots, n; \lambda \in \Lambda} \quad (1.2)$$

recibe el nombre de *matriz de relaciones de \mathcal{M} con respecto a $\{m_1, \dots, m_n\}$* .

Para $i = 0, 1, \dots, n-1$, sea $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ el ideal de \mathcal{R} generado por todos los menores de orden $(n-i)$ en la matriz de relaciones de \mathcal{M} con respecto a $\{m_1, \dots, m_n\}$. Para $i \geq n$ se define $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = \mathcal{R}$ y para $i < 0$ se toma $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = (0)$.

Lema 1.3.1 [[Ku], p. 331] *Los ideales $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ no dependen de la elección de la matriz de relaciones con respecto a $\{m_1, \dots, m_n\}$ escogida para \mathcal{M} .*

Lema 1.3.2 [[Ku], p. 332] *Los ideales $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ no dependen de la elección de los generadores de \mathcal{M} .*

Definición 1.3.3 *[[Ku], p. 333] El ideal $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ recibe el nombre de i -ésimo ideal de Fitting de \mathcal{M} . Por construcción se tiene que:*

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}_1(\mathcal{M}) \subset \dots \subset \mathcal{F}_k(\mathcal{M}) = \mathcal{R}$$

donde $k \geq \mu(\mathcal{M})$, y $\mu(\mathcal{M})$ denota el mínimo número de generadores de \mathcal{M} .

1.3.4 *[[Ku], p. 333] Citamos a continuación algunas propiedades de los ideales de Fitting:*

i. Si \mathcal{M} es un \mathcal{R} -módulo de presentación finita, entonces los ideales $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ son ideales finitamente generados.

ii. Para cada \mathcal{R} -álgebra \mathcal{S} se tiene que

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{S} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}) = \mathcal{S} \cdot \mathcal{F}_i(\mathcal{M}). \quad (1.3)$$

iii. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ es un conjunto multiplicativo entonces

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}_{\mathcal{N}}) = \mathcal{F}_i(\mathcal{M})_{\mathcal{N}}. \quad (1.4)$$

iv. Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ es un ideal entonces

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}/\mathcal{I}\mathcal{M}) = \overline{\mathcal{F}_i(\mathcal{M})}, \quad (1.5)$$

donde $\overline{\mathcal{F}_i(\mathcal{M})}$ denota la imagen de $\mathcal{F}_i(\mathcal{M})$ en \mathcal{R}/\mathcal{I} .

Definición 1.3.5 *[[Ku], p. 334] Sea $Q(\mathcal{R})$ el cuerpo total de cocientes de \mathcal{R} . Diremos que un \mathcal{R} -módulo \mathcal{M} tiene rango si $Q(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$ es un $Q(\mathcal{R})$ -módulo libre. Diremos que el rango de \mathcal{M} es el rango del $Q(\mathcal{R})$ -módulo libre $Q(\mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$.*

Proposición 1.3.6 *[[Ku], p. 334] Si \mathcal{M} tiene rango r entonces*

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = (0)$$

para $i = 0, \dots, r-1$, y $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) \neq 0$ para $i \geq r$.

Proposición 1.3.7 *[[Ku], p. 334] Sea $(\mathcal{R}, \mathfrak{m})$ un anillo local. Entonces*

$$\mu(\mathcal{M}) = \text{Min}\{n : \mathcal{F}_n(\mathcal{M}) = \mathcal{R}\}$$

y además las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. \mathcal{M} es libre de rango r ;
- ii. $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = (0)$ para $i = 0, \dots, r-1$, y $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = \mathcal{R}$ para $i \geq r$.

Corolario 1.3.8 *[[Ku]. p. 336] Sea \mathcal{R} un anillo y \mathcal{M} un \mathcal{R} -módulo finitamente generado. Entonces son equivalentes:*

- i. \mathcal{M} es localmente libre de rango r .
- ii. $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = (0)$ para $i = 0, \dots, r-1$, y $\mathcal{F}_i(\mathcal{M}) = \mathcal{R}$ para $i \geq r$.

1.4 Anillos locales completos.

En esta sección usaremos la notación

$$(\mathcal{A}, m, \mathcal{K})$$

para referirnos a un anillo local \mathcal{A} , con ideal maximal m y cuerpo residual k .

Definición 1.4.1 *Sea (\mathcal{A}, m, k) un anillo local. Sea dice que $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ es un cuerpo de coeficientes de \mathcal{A} , si es isomorfo a \mathcal{A}/m vía el homomorfismo natural*

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/m.$$

Teorema 1.4.2 *[(I.S. Cohen). [Ma] p.205] Sea (\mathcal{A}, m, k) un anillo completo y separado que contiene un cuerpo \mathcal{K} . Entonces \mathcal{A} contiene un cuerpo de coeficientes. Si además k es separable sobre \mathcal{K} , entonces \mathcal{A} contiene un cuerpo que contiene a \mathcal{K} .*

Corolario 1.4.3 *[Ma] p.206] Sea (\mathcal{A}, m, k) un anillo local, completo y regular de dimensión d , que contiene un cuerpo. Entonces*

$$\mathcal{A} \simeq k[[x_1, \dots, x_d]].$$

Estructura de anillos locales completos[[Ma], pp.210-211]

Sea (\mathcal{A}, m, k) un anillo local. Entonces se pueden producir 4 situaciones:

- i. $\text{ch}(\mathcal{A}) = 0$ y $\text{ch}(k) = 0$;

- ii. $\text{ch}(\mathcal{A}) = p$ y $\text{ch}(k) = p$;
- iii. $\text{ch}(\mathcal{A}) = 0$ y $\text{ch}(k) = p$;
- iv. $\text{ch}(\mathcal{A}) = p^n$ y $\text{ch}(k) = p$.

Un subanillo $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ es un anillo de coeficientes si se satisfacen las siguientes condiciones:

- \mathcal{R} es un anillo local noetheriano y completo con ideal maximal $m \cap \mathcal{R}$.
- Se tiene que $\mathcal{R}/m \cap \mathcal{R} \simeq \mathcal{A}/m = k$.
- $\mathcal{R} \cap m = p\mathcal{R}$, donde $p = \text{ch}(k)$.

Observación 1.4.4 En los casos (i) y (ii) \mathcal{R} no es otra cosa que el cuerpo de coeficientes. En el caso (iii) \mathcal{R} es un anillo de valoración discreta.

Teorema 1.4.5 [(I.S. Cohen). [Ma] p.211] *Sea \mathcal{A} un anillo local completo y separado. Entonces \mathcal{A} contiene un anillo de coeficientes \mathcal{R} . En el caso (iv) \mathcal{R} es de la forma $\mathcal{R} = W/p^n W$, donde W es un anillo de valoración discreta, completo y con ideal maximal pW .*

Corolario 1.4.6 [[Ma] p.211] *Sea (\mathcal{A}, m) un anillo local completo y separado, con m finitamente generado. Entonces \mathcal{A} es la imagen por un homomorfismo de un anillo local completo regular.*

Algunas propiedades de finitud en el contexto de anillos locales completos.

Teorema 1.4.7 [[ZS2], p. 259] *Sea \mathcal{A} un anillo, $m \subset \mathcal{A}$ un ideal, \mathcal{M} un \mathcal{A} -módulo y \mathcal{N} un submódulo de \mathcal{M} . Supongamos que \mathcal{A} es un espacio de Hausdorff completo para su m -topología y que \mathcal{M} es un espacio de Hausdorff para su m -topología. Sea $\{x_1, \dots, x_q\}$ un conjunto finito de elementos de \mathcal{N} , tales que sus formas iniciales $G(x_i)$ generan sobre $\text{Gr}_m(\mathcal{A})$ el módulo de formas iniciales de \mathcal{N} en $\text{Gr}_m(\mathcal{M})$. Entonces los elementos $\{x_1, \dots, x_q\}$ generan \mathcal{N} .*

Corolario 1.4.8 [[ZS2], p. 259] *Sean \mathcal{A} y \mathcal{M} como en el Teorema 1.4.7. Supongamos que $\mathcal{M}/m\mathcal{M}$ es un $(\mathcal{A}/m\mathcal{A})$ -módulo finito. Entonces \mathcal{M} es un \mathcal{A} -módulo finito. Si las clases de x_1, \dots, x_q módulo $m\mathcal{M}$ generan $\mathcal{M}/m\mathcal{M}$, entonces los elementos x_i generan \mathcal{M} .*

1.5 Anillos excelentes.

Recordemos que si $p \subset \mathcal{A}$ es un ideal primo, $\text{ht}(p)$ denota la altura del ideal primo p en \mathcal{A} .

Definición 1.5.1 [[Ma], p. 84] *Se dice que un anillo \mathcal{A} es catenario si para todo par de ideales primos $p, q \subset \mathcal{A}$ con $q \subset p$, la altura $\text{ht}(p/q)$ es finita e igual a la longitud de cualquier cadena maximal de ideales primos entre p y q .*

1.5.2 Si \mathcal{A} es un dominio noetheriano, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i. \mathcal{A} es un anillo catenario.
- ii. Para todo par de ideales primos $p, q \subset \mathcal{A}$ con $q \subset p$ se tiene que:

$$\text{ht}(p) = \text{ht}(q) + \text{ht}(p/q);$$

- iii. Para todo par de ideales primos $p, q \subset \mathcal{A}$ con $q \subset p$ y con $\text{ht}(p/q) = 1$ se tiene que

$$\text{ht}(p) = \text{ht}(q) + 1.$$

Observación 1.5.3 Si \mathcal{A} es catenario, entonces cualquier localizado de \mathcal{A} es catenario, y cualquier cociente de \mathcal{A} es catenario.

Definición 1.5.4 [[Ma], p. 84] *Se dice que un anillo \mathcal{A} es universalmente catenario si es noetheriano y toda \mathcal{A} -álgebra de tipo finito es catenaria.*

El lugar singular.

Sea \mathcal{A} un anillo noetheriano, sea $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$, sea

$$\text{Reg}(X) = \{p \in X : \mathcal{A}_p \text{ es un anillo regular} \}$$

y sea

$$\text{Sing}(X) = X - \text{Reg}(X).$$

Se dice que \mathcal{A} es J-0 si $\text{Reg}(\text{Spec}(\mathcal{A}))$ contiene un abierto no vacío de $\text{Spec}(\mathcal{A})$. Se dice que \mathcal{A} es J-1 si $\text{Reg}(\text{Spec}(\mathcal{A}))$ es abierto en $\text{Spec}(\mathcal{A})$.

Teorema 1.5.5 [[Ma], pp.246-248] Sea \mathcal{A} un anillo noetheriano. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i. Toda \mathcal{A} -álgebra finitamente generada es J-1;
- ii. Toda \mathcal{A} -álgebra finita es J-1;
- iii. Para todo $p \in \text{Spec}(\mathcal{A})$, y para toda extensión radical finita \mathcal{K}' de $k(p)$ existe un \mathcal{A} -álgebra finita \mathcal{A}' con

$$\mathcal{A}/p \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{K}'$$

que es J-0 y cuyo cuerpo de cocientes es \mathcal{K}' ($k(p)$ denota el cociente $\mathcal{A}_p/p\mathcal{A}_p$).

Se dice que un anillo noetheriano \mathcal{A} es J-2 si verifica alguna de las condiciones del Teorema 1.5.5.

Teorema 1.5.6 [[Ma], pp. 248-249] Si \mathcal{A} es un anillo local y completo entonces \mathcal{A} es J-2.

G-anillos.

Definición 1.5.7 [[Ma], p. 249] Sea \mathcal{A} un anillo noetheriano que contenga un cuerpo \mathcal{K} . Se dice que \mathcal{A} es geoméricamente regular sobre \mathcal{K} si para toda extensión finita \mathcal{K}' de \mathcal{K} , el anillo $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}'$ es regular.

Definición 1.5.8 [[Ma], p. 249] Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} anillos noetherianos. Se dice que un homomorfismo

$$\phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

es regular (o que \mathcal{B} es regular sobre \mathcal{A}) si es un morfismo plano y para cada $p \in \text{Spec}(\mathcal{A})$, la fibra $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} k(p)$ es geoméricamente regular sobre $k(p)$.

Definición 1.5.9 [[Ma], p. 249] Sea \mathcal{A} un anillo noetheriano. Se dice que \mathcal{A} es un G-anillo si para todo $p \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ la aplicación canónica

$$\mathcal{A}_p \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}_p$$

es regular.

Teorema 1.5.10 *[(Grothendieck), [Ma], pp. 254-257] Sea \mathcal{A} un G -anillo y \mathcal{B} una \mathcal{A} -álgebra finitamente generada. Entonces \mathcal{B} es un G -anillo.*

Definición 1.5.11 *[[Ma], p. 259] Se dice que un anillo \mathcal{A} es excelente si verifica las siguientes condiciones:*

- i. Es un anillo noetheriano.*
- ii. Es universalmente catenario.*
- iii. Es un G -anillo.*
- iv. Es J -2.*

Obsérvese que si \mathcal{A} es un anillo excelente, entonces cualquier localizado de \mathcal{A} es excelente y cualquier \mathcal{A} -álgebra finitamente generada es excelente. En particular, todo cociente de un anillo excelente es excelente. Además \mathbb{Z} es un anillo excelente, todo anillo completo es excelente, y todo cuerpo es también un anillo excelente.

1.6 Conjuntos construibles.

Sean X un espacio topológico y $Z \subset X$ un subconjunto. Diremos que Z es localmente cerrado en X , si para cada punto $z \in Z$ existe un entorno abierto $U \subset X$ de z , tal que $U \cap Z$ es cerrado en U . Ésto es equivalente a decir que Z es expresable como la intersección de un conjunto abierto en X y un conjunto cerrado en X .

Definición 1.6.1 *[[Ma], p. 39] Sea X un espacio topológico noetheriano y sea Z un subconjunto de X . Se dice que Z es un conjunto construible en X si Z es una unión finita de conjuntos localmente cerrados en X , i.e.*

$$Z = \bigcup_{i=1}^m (U_i \cap F_i),$$

donde para $i = 1, \dots, m$ los conjuntos U_i son abiertos, y los F_i , cerrados.

Observación 1.6.2 Si $Z, T \subset X$ son conjuntos construibles, entonces $Z \cup T$, $Z \cap T$ y $Z - T$ son conjuntos construibles.

Teorema 1.6.3 [(Chevalley) [Ma], pp.42-44] *Sea \mathcal{A} un anillo noetheriano y sea B una \mathcal{A} -álgebra de tipo finito. Sea*

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow B$$

el homomorfismo canónico, y sean $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$, $Y = \text{Spec}(B)$, y

$$f = \phi^a : Y \longrightarrow X.$$

Entonces la imagen $f(Y')$ de un conjunto construible $Y' \subset Y$ es un conjunto construible en X .

Capítulo 2

Morfismos casi-lisos.

2.1 Introducción y notación.

Retomamos en este capítulo algunas de las líneas con las que comenzábamos la Introducción. Como ya indicamos en su momento, nos interesamos por el estudio de los esquemas aritméticos, y para ello tomábamos como punto de referencia la clase de los esquemas lisos sobre cuerpos perfectos.

Recordemos que la importancia de esta última clase de esquemas radica en la existencia de un fibrado tangente (inducido por el haz de diferenciales relativo), que permite:

- Describir el conjunto de los puntos singulares de cualquier subesquema inmerso en un medio ambiente liso.
- Decidir si un centro de explosión preserva o no la noción de lisitud.

Cuando trasladamos la condición de lisitud al contexto de los esquemas aritméticos, comprobamos que el haz de diferenciales ya no juega un papel tan decisivo como en el contexto geométrico.

La noción de morfismo casi-liso sobre esquemas aritméticos introducida en [V3], surge con el propósito de considerar una clase más grande de esquemas que, en particular, incluya a los esquemas lisos. Se pretende además que esta clase sea cerrada por explosiones en centros convenientemente escogidos, y que permita, de modo natural, trabajar con un fibrado tangente. De

este fibrado tangente se espera que tenga un cometido sea comparable al del fibrado inducido por el haz de diferenciales relativo en el caso de esquemas lisos sobre cuerpos.

El propósito de esta parte de la memoria es la presentación y desarrollo la teoría de los morfismos casi-lisos, así como el estudio del fibrado tangente al que están vinculados.

En analogía con la noción de lisitud sobre cuerpos, probaremos que esta noción privilegia ciertos centros regulares, de tal modo que la transformación monoidal en estos centros es de nuevo un morfismo casi-liso. Designaremos a este tipo de subesquemas con el nombre de *centros permisibles*.

Supongamos que $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso. La noción de centro permisible que se introduce en este contexto verifica que:

- i. Todo punto cerrado es permisible.
- ii. Dado $Z \subset W$ un subesquema irreducible, existe un abierto no vacío $U \subset Z$ en el cual es permisible.
- iii. Si $Z \subset T \subset W$ son subesquemas permisibles tras la explosión con centro Z el transformado estricto de T es de nuevo permisible.

Nótese, que todas estas propiedades que son válidas para la noción de permisibilidad en la teoría de Hironaka, aunque en otro contexto, son igualmente ciertas en el contexto de los morfismos casi-lisos. Estos resultados se recogen en los Teoremas 2.8.6 y 2.9.1, y el Corolario 2.7.11.

Por su importancia, enunciamos aquí el resultado central de este capítulo:

Teorema 2.6.10. *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y sea $Z \subset W$ un centro permisible. Sea $W_1 \xrightarrow{e} W$ la explosión con centro Z . Entonces el morfismo $\pi_1 = \pi \circ e : W_1 \longrightarrow Y$ es casi-liso.*

Buena parte del trabajo que desarrollamos está dedicado al estudio de los centros permisibles. En este sentido, ampliamos el concepto de permisibilidad ya introducido en [V3] (véase la definición 2.6.8). Además, en esta línea, se

presentan la Definición 2.7.5, y el Teorema 2.7.9 como una generalización de la teoría y resultados que aparecen en [V3].

Esbozamos a continuación, un pequeño esquema de lo que será el contenido de esta parte de la memoria.

Las primeras secciones se dedican a la presentación y estudio de los morfismos casi-lisos:

- En la sección 2.2 definimos el *Haz de Diferenciales con Polos Logarítmicos* a lo largo de ciertas hipersuperficies. En el contexto de los morfismos casi-lisos, este haz induce un fibrado tangente cuyo papel es central en el desarrollo de esta teoría. Utilizando este concepto, presentamos en la sección 2.3 la definición de *morfismo casi-liso* (Definiciones 2.3.1 y 2.3.5).
- En la sección 2.4 analizamos el comportamiento de los morfismos casi-lisos por cambios de base étale (Lema 2.4.1). Esta compatibilidad nos permitirá trabajar en el ámbito local con mayor simplicidad de argumentos.
- En la sección 2.5 describimos *el haz dual del módulo de diferenciales con polos*, e introducimos la noción de *punto de rango alto*. El contenido de esta sección es esencial para la construcción del ideal jacobiano que introduciremos en secciones posteriores.

El resto de las secciones, 2.6, 2.7, 2.8, y 2.9, están dedicadas al estudio del comportamiento de los morfismos casi-lisos por explosiones:

- En la sección 2.6 presentamos el concepto de *centro geoméricamente permisible* (Definición 2.6.1). Considerando explosiones en centros geoméricamente permisibles estudiamos el haz de diferenciales con polos que un esquema casi-liso induce sobre su explotado, (Lemas 2.6.5, y 2.6.6, y (2.6.7)).

Al final de la sección 2.6, presentamos una *definición local de centro permisible* (Definición 2.6.8). Esta definición es más general que la ya introducida en [V3], y permite plantear el problema de resolución inmersa.

En el Teorema 2.6.10, comprobamos que la explosión de un esquema casi-liso en un centro permisible es de nuevo un esquema casi-liso. Este hecho es fundamental en la teoría de morfismos casi-lisos, pues nos garantiza que efectivamente trabajamos en una clase cerrada por explosiones en centros adecuadamente escogidos.

- En la sección 2.7 definimos lo que será nuestra herramienta de trabajo más importante: el *Ideal Jacobiano* asociado a un subesquema cerrado inmerso en un medio ambiente casi-liso, (Definición 2.7.5).

Probamos que la permisibilidad de un subesquema inmerso se puede expresar en términos de su Ideal Jacobiano, lo que dota de plena legitimidad a la noción de permisibilidad local ya introducida en la sección 2.6 (ver Teoremas 2.7.8, y 2.7.9). Estos resultados generalizan los que ya aparecían en [V3], y se extienden a una clase de centros permisibles más amplia.

La sección 2.7 concluye con algunas observaciones y ejemplos, en los que intentamos ilustrar hasta qué punto el Ideal Jacobiano de un subesquema inmerso, contiene información sobre su permisibilidad.

- En la sección 2.8, estudiamos la restricción de los morfismos casi-lisos a subesquemas inmersos.
- En la sección 2.9 analizamos el comportamiento de los centros permisibles por explosiones en centros permisibles propios. Es este el propósito del Teorema 2.9.1, el Ejemplo 2.9.3, y la Proposición 2.9.4.
- Para finalizar, la sección 2.10 se dedica al estudio de la permisibilidad de curvas verticales. El principal resultado es la Proposición 2.10.2 donde se demuestra que, tras un número finito de explosiones en centros permisibles, es posible lograr que cualquier curva vertical reducida e irreducible sea un centro permisible.

Notación. Dado W un esquema, y $x \in W$ un punto cerrado:

- Denotaremos por $k_W(x)$ al cuerpo residual correspondiente al punto x . Cuando no resulte confuso escribiremos $k(x)$ en lugar de $k_W(x)$

- Designaremos por $m(x)$ al ideal maximal correspondiente al punto cerrado x .
- Denotaremos por In_x a la aplicación natural

$$\text{In}_x : \mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \text{Gr}_m(\mathcal{O}_{W,x}),$$

que a cada elemento $a \in \mathcal{O}_{W,x}$ con $\text{ord}_m(a) = k$ le asocia su imagen en m^k/m^{k+1} .

Además, dado un subesquema cerrado $H \subset W$ denotaremos por $\mathcal{I}(H)$ a su haz de ideales correspondiente, y dado un haz de ideales, \mathcal{I} , denotaremos por $V(\mathcal{I})$ al subesquema cerrado que determina.

2.2 Módulo de Diferenciales con Polos Logarítmicos.

2.2.1 Durante la presente memoria Y denotará un esquema íntegro, de Dedekind y \mathcal{F} su cuerpo total de cocientes. Supondremos que \mathcal{F} es un cuerpo de característica 0. Para cada punto $y \in \text{Spec}(Y)$ asumiremos que el cuerpo residual correspondiente, es perfecto.

Nos centraremos en el caso en que $Y = \text{Spec}(\mathcal{D})$, cuando \mathcal{D} es el anillo de enteros en un cuerpo de números, esto es, es la clausura íntegra de \mathbb{Z} en una extensión finita de \mathbb{Q} .

Consideremos $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo separado y de tipo finito, y sea $\Omega_{W/Y}^1$ el haz de diferenciales relativo asociado a este morfismo. Puesto que el morfismo es de tipo finito, $\Omega_{W/Y}^1$ es un haz de módulos finitamente generado sobre \mathcal{O}_Y .

Sea ahora $X \subset W$, un subesquema cerrado. En este caso, la sucesión exacta

$$\mathcal{I}(X)/\mathcal{I}(X)^2 \longrightarrow \Omega_{W/Y}^1 \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X/Y}^1 \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

nos permite describir el haz de diferenciales relativo $\Omega_{X/Y}^1$, a partir de $\Omega_{W/Y}^1$, y del haz de ideales $\mathcal{I}(X)$.

Por ejemplo, si $X = x \in W$ es un punto cerrado, entonces $\pi(x) \in Y$ es también un punto cerrado. Sea $k_W(x)$ el cuerpo residual de W en x ,

y $k_Y(\pi(x))$ el de Y en $\pi(x)$. En tal caso $k_W(x)$ es una extensión finita y separable de $k_Y(x)$, y como consecuencia $\Omega_{X/Y}^1 = 0$.

En estas condiciones, la sucesión exacta (2.1) nos permite concluir que si $\{v_1, \dots, v_d\}$, es un sistema de generadores del ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{W,x}$, entonces $\{dv_1, \dots, dv_d\}$ generan el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\Omega_{W,x/Y}^1$.

2.2.2 Si $\pi : W \rightarrow Y$ es además un morfismo liso y W es un esquema íntegro de dimensión d , entonces $\Omega_{W/Y}^1$ es un haz de módulos sobre \mathcal{O}_W localmente libre de rango $d - 1$, y W es un esquema regular.

Por otro lado, si $W \rightarrow Y$ es un morfismo plano y W es un esquema regular de dimensión d , entonces $W_{\mathcal{F}}$ es un esquema regular, y como consecuencia $W_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{F})$ es un morfismo liso, puesto que \mathcal{F} es un cuerpo de característica cero y por lo tanto perfecto. Existe pues un conjunto finito de puntos, $F \subset Y$, de modo tal que si $U = Y - F$, entonces la restricción $\pi_U : W_U \rightarrow U$ es un morfismo liso de dimensión relativa $d - 1$.

2.2.3 Sea ahora W un esquema íntegro y regular de dimensión d , y sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo separado, plano y de tipo finito. Si \mathcal{K} denota el cuerpo total de cocientes de W entonces existe un morfismo natural (localización) entre los haces de \mathcal{O}_W -módulos

$$\varphi : \Omega_{W/Y}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{F}}^1$$

donde $\Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{F}}^1$ es un haz constante sobre \mathcal{O}_W .

Sea $\bar{\Omega}_{W/Y}^1$ la imagen de φ y $d : \mathcal{O}_W \rightarrow \bar{\Omega}_{W/Y}^1$ la derivación inducida. Si $E = \{H_1, \dots, H_r\}$ es un conjunto de hipersuperficies irreducibles de W definimos el haz de diferenciales con polos a lo largo de E como la extensión:

$$\bar{\Omega}_{W/Y}^1 \subset \bar{\Omega}_{W/Y}^1(E) (\subset \Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{F}}^1)$$

que obtenemos agregando diferenciales logarítmicas a lo largo de cada hipersuperficie irreducible H_i . Denotaremos este haz por $\bar{\Omega}_{W/Y}^1(E)$, o bien por $\omega(E)$.

Describimos, a continuación, la construcción local correspondiente a esta definición. Si $x \in W$, $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{W,x}$, e $Y = \text{Spec}(\mathcal{D})$, entonces $\bar{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{D}}^1$ es la imagen de

$$\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{D}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{F}}^1$$

que denotaremos por $\bar{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{D}}^1$. Si f_i es una ecuación local de H_i en \mathcal{R} , entonces

$$\bar{\Omega}_{W/Y}^1(E)_x = \bar{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{D}}^1 \left[\frac{df_1}{f_1}, \dots, \frac{df_r}{f_r} \right] \subset \Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{F}}^1.$$

Observación 2.2.4 La fórmula logarítmica $\frac{dfg}{fg} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}$ nos asegura que el módulo $\bar{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{D}}^1 \left[\frac{df_1}{f_1}, \dots, \frac{df_r}{f_r} \right]$ es independiente de la elección de la ecuación local f_i de cada una de las hipersuperficies H_i . En particular, este hecho nos garantiza que $\omega(E)$ es efectivamente un haz. Nótese además que $\omega(E)$ es un haz sin torsión.

Observación 2.2.5 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo liso y $y \in Y$ un punto cerrado. Entonces $\pi^{-1}(y) = H \subset W$, donde H es una hipersuperficie regular. Si tomamos $E = \{H\}$, es claro que

$$\Omega_{W/Y}^1 = \bar{\Omega}_{W/Y}^1 = \bar{\Omega}_{W/Y}^1(E)$$

Ilustraremos esta observación en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.6

Consideremos $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, y

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

el morfismo inducido por la inclusión natural

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x].$$

Este morfismo es claramente liso. El módulo de diferenciales $\Omega_{W/Y}$ está generado por el elemento $\{dx\}$. Dado un punto cerrado $y \in Y$, con ideal maximal $m(y) = \langle p \rangle \subset \mathbb{Z}$, sea $W_y = W \times_Y \{y\}$ la fibra sobre $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Entonces:

- $\frac{dp}{p} = 0$.
- Cualquier elemento del dual $\delta \in \omega(E)^*$, verifica que $\delta(p) = 0 \in \langle p \rangle$, por lo que $\omega(E)^*$ induce las derivadas en W_y relativas a \mathbb{F}_p .
- Como consecuencia el módulo de diferenciales $\Omega_{W/Y}$ induce sobre cada primo $p \in \mathbb{Z}$, el haz de derivadas $\Omega_{W_p/\mathbb{F}_p}$.

2.3 Morfismos casi-lisos.

Una vez introducido el concepto de módulo de diferenciales con polos logarítmicos, estamos en condiciones de presentar la definición de morfismo casi-liso.

Definición 2.3.1 Sea W un esquema regular, íntegro de dimensión d , y sea

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

un morfismo separado, plano y de tipo finito. Diremos que $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo geoméricamente casi-liso, si existe un conjunto finito de puntos cerrados en Y , $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset Y$, de modo que:

(i) Si $U = Y - F$, la restricción

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

es un morfismo liso.

(ii) Si $E = \{H_1, \dots, H_r\}$ es el conjunto de componentes irreducibles de $\bigcup_{x_i \in F} \pi^{-1}(x_i)$ con estructura reducida, entonces E es una unión de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales.

Diremos que $\pi : W \longrightarrow Y$ es casi liso si es geoméricamente casi-liso, y además:

(iii) El haz de \mathcal{O}_W -módulos $\bar{\Omega}_{W/Y}^1(E)$ es localmente libre de dimensión $d-1$.

Observación 2.3.2 Como hemos señalado en 2.2.2, la existencia del conjunto $F \subset Y$, de modo que se verifique la condición 2.3.1 (i), está garantizada, puesto que W es regular, y $\pi : W \longrightarrow Y$ es plano y de tipo finito.

Observación 2.3.3 Habitualmente denotaremos el haz de módulos de diferenciales con polos como $\bar{\Omega}_{W/Y}^1(E)$, $\omega(E)$, o también como $\omega(\pi)$. Nótese que la notación $\omega(\pi)$ es perfectamente legítima. En efecto, el haz de diferenciales con polos logarítmicos depende sólo del morfismo π ya que no es necesario agregar polos a lo largo de las fibras sobre los puntos de Y , donde el morfismo es liso (Observación 2.2.5, y Ejemplo 2.2.6).

Nuestro siguiente propósito, es presentar una versión local de la Definición 2.3.1.

2.3.4 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo separado, plano y de tipo finito, con W íntegro y regular de dimensión d . Decir que este morfismo es geoméricamente casi-liso, es equivalente a afirmar que para cada punto cerrado $x \in W$, existe un sistema regular de parámetros, $\{v_1, \dots, v_d\}$, en $\mathcal{O}_{W,x}$ tal que si τ es un parámetro local en $\mathcal{O}_{Y,\pi(x)}$, entonces:

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

para $1 \leq s \leq r \leq d, \alpha_i > 0$ y v una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Obsérvese que en tal caso el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado, localmente, por los elementos,

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.2)$$

Denotemos por \mathcal{R} al anillo local $\mathcal{O}_{W,x}$. Con estos datos, podemos construir el morfismo

$$\mathcal{R}^d \xrightarrow{\varphi} \omega(\pi)_x,$$

con

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= dv_i & \text{si } i \notin \{s, \dots, r\}; \\ \varphi(e_j) &= \frac{dv_j}{v_j} & \text{si } j \in \{s, \dots, r\} \end{aligned}$$

que nos permite construir la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow \mathcal{R}^d \xrightarrow{\varphi} \omega(\pi)_x \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

a partir de la que deducimos que $\omega(\pi)_x$ es un \mathcal{R} -módulo localmente libre de rango $d - 1$ si y sólo si $\ker(\varphi)$ es principal y está generado por un elemento de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \\ + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $a_j \in \mathcal{O}_{W,x}$ para $j = 1, \dots, d$, y a_j es una unidad, para algún $j \in \{1, \dots, d\}$.

2.3.5 Casi-lisitud: Definición local. Con los resultados señalados en 2.3.4, presentaremos una definición local equivalente a la Definición 2.3.1:

Sea W un esquema íntegro y regular de dimensión d , y sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo separado, plano y de tipo finito. Entonces $\pi : W \longrightarrow Y$ es un *morfismo casi-liso* si y sólo si para cada punto cerrado $x \in W$ existe una sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$:

$$\{v_1, \dots, v_d\},$$

de modo que, si τ es un parámetro local en $\mathcal{O}_{Y,\pi(x)}$ entonces:

- i. $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdots v_r^{\alpha_r}$, donde $1 \leq s \leq r \leq d$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$, y v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Obsérvese bajo estas hipótesis, el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$, está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}, \quad (2.5)$$

para los que pediremos la siguiente condición:

- ii. Existe una relación que vincula a los elementos de (2.5):

$$\begin{aligned} a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \\ + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

de modo que alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, para algún subíndice $i \in \{1, \dots, d\}$.

En lo sucesivo abreviaremos diciendo que el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ sea casi-liso localmente en $x \in W$ diciendo simplemente que

$$\mathcal{O}_{Y,\pi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x}$$

es casi-liso.

Observación 2.3.6 Puesto que la definición del $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\omega(\pi)_x$ es independiente del sistema regular de parámetros escogido (2.2.4), se deduce que si 2.3.5 (ii) se verifica para un sistema regular de parámetros que cumpla la condición 2.3.5 (i), entonces se verifica para cualquier sistema regular de parámetros que cumpla la condición 2.3.5 (i).

2.4 Cambios de base étale.

En esta sección probaremos que los morfismos casi-lisos se conservan por cambios de base étale. Este hecho nos permitirá trabajar con mayor comodidad en el contexto local. Al final de esta sección haremos uso de esta compatibilidad para probar que datos como los introducidos en la definición 2.3.5 y que sólo se refieren a un punto cerrado, se pueden extender a un entorno abierto que contenga al mencionado punto (2.4.4 y 2.4.5).

Lema 2.4.1 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo de tipo finito y plano. Sea $x \in W$ un punto cerrado, y*

$$\eta : (W', x') \longrightarrow (W, x)$$

un entorno étale de $x \in W$. Entonces $\mathcal{O}_{W,x}$ es regular si y solo si $\mathcal{O}_{W',x'}$ es regular. Además si el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ es geoméricamente casi-liso en $x \in W$ entonces el morfismo $\mathcal{O}_{Y,\pi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x}$ es casi-liso si y sólo si el morfismo inducido $\mathcal{O}_{Y,\pi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{W',x'}$, es casi-liso.

Demostración: Si

$$\eta : (W', x') \longrightarrow (W, x)$$

es un morfismo local-étale de anillos locales, es un hecho bien conocido que $\mathcal{O}_{W,x}$ es regular si y solo si $\mathcal{O}_{W',x'}$ es regular, (ver, por ejemplo [Ra, p. 75]).

Sea $\pi(x) = y \in Y$, y

$$\pi' : W' \longrightarrow Y$$

el morfismo inducido por la composición $\pi \circ \eta$.

Sea $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$, el ideal maximal correspondiente al punto cerrado $y \in Y$. Puesto que por hipótesis, el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ es geoméricamente casi-liso, existe un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$, $\{v_1, \dots, v_d\}$, tal que

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$$

donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad.

Sea \mathcal{K} el cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_{W,x}$ y \mathcal{K}' el de $\mathcal{O}_{W',x'}$. Entonces \mathcal{K}' es una extensión finita y separable de \mathcal{K} .

Obsérvese que se tiene una inclusión natural

$$\Omega^1(\mathcal{K}/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{K}' \otimes_{\mathcal{K}} \Omega^1(\mathcal{K}/\mathcal{F}) = \Omega^1(\mathcal{K}'/\mathcal{F}),$$

y por definición

$$\omega(\pi)_x = \bar{\Omega}^1(\mathcal{O}_{W,x}/\mathcal{O}_{Y,y}) \left[\frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r} \right],$$

entonces

$$\omega(\pi)_x \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{O}_{W',x'} \simeq \omega(\pi')_{x'}.$$

Ahora el resultado del lema se deduce del hecho de que $\mathcal{O}_{W',x'}$ es fielmente plano sobre $\mathcal{O}_{W,x}$, de modo que $\omega(\pi')$ es libre sobre $\mathcal{O}_{W',x'}$, si y sólo si $\omega(\pi)$ es libre sobre $\mathcal{O}_{W,x}$. \square

Observación 2.4.2 Si existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$ en $\mathcal{O}_{W,x}$ tal que la condición 2.3.5 (i) se verifica con $v = 1$, entonces la condición 2.3.5 (ii) se verifica de manera automática. Obsérvese que $d\tau = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \alpha_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + \alpha_r \frac{dv_r}{v_r} = 0.$$

Sea $k_W(x)$ el cuerpo residual del punto x , y sea q la característica del mismo. Entonces existen unidades $b_s, \dots, b_r \in \mathbb{Z}_{<q>}$, y números naturales $n_s, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que

$$\alpha_i = b_i q^{n_i}, \text{ para } i = r, \dots, s.$$

Sea $N = \min \{n_s, \dots, n_r\}$, entonces

$$0 = \alpha_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + \alpha_r \frac{dv_r}{v_r} = q^N \left(b_s q^{n_s-N} \frac{dv_s}{v_s} + \dots + b_r q^{n_r-N} \frac{dv_r}{v_r} \right) \subset \omega(\pi).$$

Como $\omega(\pi)$, ha sido construido como un haz de módulos sin torsión, podemos concluir que

$$\left(b_s q^{n_s-N} \frac{dv_s}{v_s} + \dots + b_r q^{n_r-N} \frac{dv_r}{v_r} \right) = 0,$$

y en esta relación $b_i q^{n_i-N}$ es una unidad en $\mathbb{Z}_{<q>} \subset \mathcal{O}_{Y,\pi(x)}$ para algún $i \in \{s, \dots, r\}$.

Observación 2.4.3 Si existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$ en $\mathcal{O}_{W,x}$ tal que 2.3.5 (i) se verifica, con algún exponente $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ coprimo con la característica del cuerpo residual $k_W(x)$ de $\mathcal{O}_{W,x}$ entonces la condición 2.3.5 (ii) también se verifica.

Para comprobarlo, consideremos el anillo

$$\mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x}[t] / \langle t^{\alpha_j} - v \rangle$$

y $x' \in \text{Spec}(\mathcal{B})$ un punto cerrado convenientemente escogido. Sea

$$(\mathcal{O}_{W',x'}) = \mathcal{B}_{m(x')}.$$

Entonces $(\mathcal{O}_{W',x'})$ es un entorno local-étale de $\mathcal{O}_{W,x}$, y en $(\mathcal{O}_{W',x'})$, podemos reescribir la expresión para τ del siguiente modo:

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r} = v_s \cdot \dots \cdot (\sqrt[\alpha_j]{v} v_j)^{\alpha_j} \cdot \dots \cdot v_r.$$

Escogiendo en $(\mathcal{O}_{W',x'})$ el sistema regular de parámetros

$$\{v_1, \dots, v_s, \dots, \sqrt[\alpha_j]{v} v_j, \dots, v_s, \dots, v_d\},$$

estamos en las condiciones de la Observación 2.4.2, por lo que podemos concluir que $(\mathcal{O}_{W',x'})$ es casi-liso sobre $\mathcal{O}_{Y,y}$. Ahora, por el Lema 2.4.1, se tiene que $\mathcal{O}_{W,x}$ es casi-liso sobre $\mathcal{O}_{Y,y}$.

2.4.4 Sea $W \xrightarrow{\pi} Y$ un morfismo casi liso. Sea x un punto cerrado y $\{v_1, \dots, v_d\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$ para el que se verifica la condición 2.3.5 (i). Sea $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{W,x}$. Como en 2.3.4, definimos el morfismo:

$$\mathcal{R}^d \xrightarrow{\varphi} \omega(E)_x \longrightarrow 0$$

con

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) &= dv_i & \text{si } i \notin \{s, \dots, t\}; \\ \varphi(e_j) &= \frac{dv_j}{v_j} & \text{si } j \in \{s, \dots, t\}. \end{aligned}$$

Por construcción $\omega(E) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{K} = \Omega^1(\mathcal{K}/\mathcal{F})$ es un \mathcal{K} -espacio vectorial de dimensión $d - 1$. El $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\omega(E)_x$ es libre de rango $d - 1$ si y sólo si existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \xrightarrow{i} \mathcal{R}^d \xrightarrow{\varphi} \omega(E)_x \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

en la que $i(\ker(\varphi))$ es el submódulo de \mathcal{R}^d generado por (a_1, \dots, a_d) , donde $a_i \in \mathcal{R}$ son los coeficientes que aparecen en la relación 2.3.5 (ii).

Si π es un morfismo localmente liso en x , entonces el parámetro τ de $\mathcal{O}_{Y, \pi(x)}$ se extiende a un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W, x}$:

$$\{v_1 = \tau, v_2, \dots, v_d\}.$$

En tal caso, obsérvese que $\mathcal{O}_{W, x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y, y}} k_Y(\pi(x))$ es un esquema regular sobre $k_Y(\pi(x))$ y las condiciones 2.3.5 (i) y (ii) se verifican de manera obvia:

i. $\tau = v_1$;

ii. $0 = \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dv_1}{v_1}$.

En este contexto, la construcción de φ y la sucesión exacta (2.7) no tiene excesivo interés.

En cambio si el morfismo π no es liso en x , nos gustaría entender el morfismo φ y la sucesión exacta (2.7) como datos de naturaleza local en puntos de W . Naturalmente la exactitud de (2.7) continua siendo válida en un entorno de x puesto que $\omega(\pi)$ es un haz de módulos coherente, sin embargo, para un punto cerrado z de un tal entorno, no es del todo claro que la formulación de 2.3.5 en función de un sistema regular de parámetros en x , garantice la validez de 2.3.5 (i) y (ii) para algún sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W, z}$.

2.4.5 Restringiéndonos a un entorno abierto conveniente de x , que denotaremos por U , podemos suponer que:

- i. Para cada punto $z \in U$ o bien π es un morfismo liso en z o bien $\pi(x) = \pi(z)$, (i.e., podemos reducir el argumento al caso en que el morfismo es liso excepto en $\pi(x)$.)
- ii. Los elementos v_1, \dots, v_d son secciones globales en \mathcal{O}_U , y los elementos dv_i , con $i \notin \{s, \dots, t\}$ y $\frac{dv_i}{v_j}$, con $j \in \{s, \dots, t\}$, son secciones globales de $\omega(\pi)|_U$.
- iii. Si $\pi(z) = \pi(x)$ existe un subconjunto

$$\{v_{s'}, \dots, v_{t'}\} \subset \{v_s, \dots, v_t\}$$

que se extiende a un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W, z}$, de modo que:

$$p = v_{s'}^{\alpha_{s'}} \cdot \dots \cdot v_{t'}^{\alpha_{t'}} v'$$

donde v' es una unidad en $\mathcal{O}_{W, z}$.

- iv. Para cada índice $j \in \{s, \dots, r\}$, v_j define un esquema regular cerrado de tipo finito sobre el cuerpo perfecto $k_Y(y)$, que denotaremos por H_j . Si \bar{v}_i es la restricción de v_i a H_j , entonces:

$$\{d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_{j-1}, d\bar{v}_{j+1}, \dots, d\bar{v}_d\}$$

generan el \mathcal{O}_{H_j} -módulo libre de diferenciales relativo a $k_Y(y)$, ésto es, $\Omega^1(H_j/k_Y(y))$.

Sea, por tanto $z \in U$ un punto cerrado y $\pi(x) = y$. El cuerpo residual $k_W(z)$ es una extensión finita y separable del cuerpo perfecto $k_Y(y)$ así que podemos escoger un entorno étale:

$$\alpha_Y : (Y', y') \longrightarrow (Y, y),$$

de modo que $k_{Y'}(y') = k_W(z)$.

Este morfismo induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & \longleftarrow & W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

y podemos elegir puntos cerrados $x', z' \in W'$ de modo que

$$\alpha_W : (W', x') \longrightarrow (W, x)$$

es un entorno local-étale de $\mathcal{O}_{W,x}$, y

$$\alpha_W : (W', z') \longrightarrow (W, z)$$

es un entorno local-étale de $\mathcal{O}_{W,z}$ con $k_W(z) = k_{W'}(z') = k_{Y'}(y')$. Esta hipótesis, nos permite suponer que para $i \in \{1, \dots, d\} - \{s', \dots, t'\}$, existen unidades $\beta_i \in \mathcal{O}_{Y',y'} \subset \mathcal{O}_{W',x'}$ de modo que

$$v'_i = v_i - \beta_i \in m(z').$$

Como $d(v_i) = d(v'_i)$ la condición (iv) nos garantiza que si v'_i es un elemento en $\mathcal{O}_{W',x'}$ cuya clase módulo $\mathcal{I}(H_j)$ es \bar{v}'_i , para $i = 1, \dots, d$, $i \neq j$, entonces $\{v'_1, \dots, v'_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W',z'}$ y $v'_j = v_j$ para $j \in \{s', \dots, r'\}$.

En estas condiciones la relación 2.3.5 (ii) se puede interpretar como

$$a_1 dv'_1 + \dots + a_{s-1} dv'_{s-1} + a_s \frac{dv'_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv'_r}{v_r} + a_{r+1} dv'_{r+1} + \dots + a_d dv'_d = 0$$

donde ahora $v_j = v'_j$ si $i \in \{s', \dots, r'\}$ ó v_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W',z'}$.

Para concluir obsérvese que

$$0 = a'_1 dv'_1 + \dots + a'_d dv'_d$$

donde:

$$a'_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \notin \{s, \dots, r\} \\ \frac{a_i}{v_i} & \text{si } i \in \{s, \dots, r\} - \{s', \dots, r'\} \\ a_i & \text{si } i \in \{s', \dots, r'\} \end{cases} ,$$

y aplíquese el Lema 2.4.1.

2.5 Fibrados tangentes.

Estudiaremos en esta sección el haz el dual del haz de módulos de diferenciales con polos, $\omega^*(\pi)$, asociado a un morfismo casi-liso $\mathcal{O}_{W,x}$.

Entre otras cosas, su estudio nos permitirá definir un tipo de puntos cerrados en W que llamaremos *puntos de rango alto*. Descubriremos la importancia de estos puntos a lo largo de secciones posteriores, cuando presentemos el concepto de *centro permisible*.

2.5.1 Sea W un esquema de dimensión d . Consideremos $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $x \in W$ un punto cerrado. Sea $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{W,x}$, \mathcal{K} el cuerpo de cocientes de \mathcal{R} , $\mathcal{S} = \mathcal{O}_{Y,\pi(x)}$, y \mathcal{F} el cuerpo de cocientes de \mathcal{S} .

Sea $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Puesto que π es un morfismo casi-liso en x , existe un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} , $\{v_1, \dots, v_d\}$, de modo que como en (2.3.5)

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$ para $i = s, \dots, r$. Por lo tanto

$$\omega(\pi)_x = \bar{\Omega}^1(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \left[\frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r} \right].$$

Sea $D \in \text{Der}_S(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. En tal caso, D se corresponde con un elemento del dual de los diferenciales relativos (sin polos),

$$\delta_D \in \text{Hom}(\Omega^1(\mathcal{R}/S), \mathcal{R}).$$

Como

$$\Omega^1(\mathcal{K}/\mathcal{F}) = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \Omega^1(\mathcal{R}/S)$$

y \mathcal{R} no tiene torsión, δ_D se puede interpretar como un elemento de $\text{Hom}(\omega(\pi)_x, \mathcal{R})$ siempre y cuando, para $i = s, \dots, r$

$$\delta_D \left(\frac{dv_i}{v_i} \right) \in \mathcal{R}, \text{ i.e. } \delta_D(dv_i) \in v_i \mathcal{R},$$

o lo que es lo mismo si

$$D(v_i) \in \langle v_i \rangle.$$

Podemos concluir, por tanto, que $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\omega(E)_x, \mathcal{R})$ es el subconjunto de las derivaciones de $\delta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ que verifican

$$\delta(dv_j) \in \langle v_j \rangle$$

para $j = s, \dots, r$.

De este modo, el haz de módulos $\omega(\pi)$ define un fibrado tangente de dimensión $d - 1$ y sus secciones son campos vectoriales tangentes a cada componente de cada fibra de π .

2.5.2 Para cada elemento $\delta \in \omega(\pi)^*$, la relación:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0$$

que aparece en la definición 2.3.5 da lugar a una relación:

$$\begin{aligned} a_1 \delta(dv_1) + \dots + a_{s-1} \delta(dv_{s-1}) + a_s \frac{\delta(dv_s)}{v_s} + \dots + a_r \frac{\delta(dv_r)}{v_r} + a_{r+1} \delta(dv_{r+1}) + \dots \\ \dots + a_d \delta(dv_d) = 0. \end{aligned}$$

Nótese que $\frac{\delta(dv_j)}{v_j} \in R$ ya que $\delta(dv_j) \in \langle v_j \rangle$, para $j = s, \dots, r$.

2.5.3 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $x \in W$ un punto cerrado. Sea $k_W(x)$ el cuerpo residual de x . Fijemos una base de $\omega(\pi)_x^*$:

$$\{\delta_1, \dots, \delta_{d-1}\}.$$

Cada elemento δ_i induce una transformación $k_W(x)$ -lineal:

$$\overline{D}_{\delta_i} : m/m^2 \longrightarrow k_W(x)$$

donde $m = m(x)$. Ahora definimos la aplicación $k_W(x)$ -lineal:

$$\begin{aligned} T_x : m/m^2 &\longrightarrow \underbrace{k_W(x) \times \dots \times k_W(x)}_{d-1} \\ \beta &\longrightarrow (\overline{D}_{\delta_1}(\beta), \dots, \overline{D}_{\delta_{d-1}}(\beta)) \end{aligned}$$

El rango de la aplicación T_x , obviamente no depende de la elección de la base

$$\{\delta_1, \dots, \delta_{d-1}\},$$

de $\omega(\pi)_x^*$. Como para $i, j = s, \dots, r$ $\delta_i(dv_j) \in \langle v_j \rangle$, $\langle \overline{v}_s, \dots, \overline{v}_r \rangle \subset m/m^2$ es un subespacio de dimensión $r - s + 1$ que está contenido en el núcleo de la aplicación T_x .

Definición 2.5.4 Sea x un punto cerrado en W . Diremos que x es un punto de rango alto si

$$\ker(T_x) = \langle \overline{v}_s, \dots, \overline{v}_r \rangle,$$

ésto es, si y sólo si

$$\dim[\ker(T_x)] = r - s + 1$$

o equivalentemente si

$$\text{rk}_{k_W(x)}(T_x) = d - r + s - 2.$$

En el transcurso de la demostración de la Proposición 2.5.6 comprobaremos que en un punto cerrado $x \in W$ sólo puede suceder alguno los dos casos siguientes:

$$\dim \ker(T_x) = \begin{cases} r - s + 1 & (\text{si } x \text{ es un punto de rango alto}) \\ \text{ó} \\ r - s + 2 \end{cases}$$

2.5.5 Sea W un esquema de dimensión d y $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Sea $x \in W$ un punto cerrado, y $\pi(x) = y \in Y$, con $m(y) = \tau > \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ el ideal maximal correspondiente. Por tanto, en $\mathcal{O}_{W,x}$ existe un sistema regular de parámetros, $\{v_1, \dots, v_d\}$, una unidad $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ y números naturales $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$, tal que como en 2.3.5 (i):

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}.$$

Con estos datos, el módulo de diferenciales con polos está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.8)$$

Como en (2.3.5 (ii)), hay una relación que vincula a los elementos de (2.8):

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.9)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Proposición 2.5.6 Con la notación de 2.5.5, x es un punto de rango alto si y sólo si a_j es una unidad para algún $j \in \{s, \dots, r\}$.

Demostración:

(\Leftarrow) Supongamos en primer lugar que existe algún $j \in \{s, \dots, r\}$ tal que $a_j \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a_s es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. En tal caso podemos escoger una base de $\omega(\pi)_x^*$,

$$\{\delta_1, \dots, \delta_{s-1}, \delta_{s+1}, \dots, \delta_d\},$$

como describimos a continuación:

$$\begin{aligned} \delta_i(dv_j) &= \delta_{ij} & \text{si } j \notin \{s, \dots, r\}, \\ \delta_i(dv_j) &= \delta_{ij} v_j & \text{si } j \in \{s+1, \dots, r\}, \end{aligned}$$

donde suponemos $i \neq s$. De este modo, los vectores

$$\{T_x(\bar{v}_k) : k \notin \{s, \dots, r\}\}$$

son linealmente independientes en $k_W(x)^{d-1}$, y por tanto

$$\ker(T_x) = \langle \bar{v}_s, \dots, \bar{v}_r \rangle.$$

(\Rightarrow) Supongamos ahora que x es un punto de rango alto. Si el ideal

$$\langle a_s, \dots, a_r \rangle \subset \mathcal{O}_{W,x}$$

es propio, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r < d$ y que a_d es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

En $\omega(\pi)_x^*$ escogemos una base

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_{d-1}\}$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \gamma_i(dv_j) &= \delta_{ij} & \text{si } j \notin \{s, \dots, r\}, j \neq d \\ \gamma_i(dv_j) &= \delta_{ij}v_j & \text{si } j \in \{s, \dots, r\} \end{aligned}$$

En estas condiciones

$$C = \{T_x(\bar{v}_k)/k \in \{1, \dots, d-1\} - \{s, \dots, r\}\} \quad (2.10)$$

es un conjunto de $d-1-(r-s+1)$ vectores linealmente independientes en la imagen de T_x , y por lo tanto

$$\dim(\ker(T_x)) \leq d - (d-1-(r-s+1)) = r-s+2.$$

Por otro lado tal como hemos indicado en 2.5.3, para cada punto cerrado $x \in W$:

$$\dim(\ker(T_x)) \geq r-s+1.$$

A continuación calcularemos la imagen de \bar{v}_d por la aplicación T_x :

- Para cada $j \in \{1, \dots, d-1\} - \{s, \dots, r\}$ se tiene que:

$$0 = a_j \gamma_j(dv_j) + a_d \gamma_j(dv_d)$$

luego

$$\gamma_j(dv_d) = -a_d^{-1}a_j.$$

- Para cada $j \in \{s, \dots, r\}$, se tiene que:

$$0 = a_j \frac{\gamma_j(dv_j)}{v_j} + a_d \gamma_j(dv_d) = a_j + a_d \gamma_j(dv_d)$$

por lo que $\gamma_j(dv_d) = -a_d^{-1}a_j \in m_x$ para cada $j \in \{s, \dots, r\}$.

Como

$$T_x(\bar{v}_d) = (\gamma_1(dv_d), \dots, \gamma_{d-1}(dv_d))$$

entonces $T_x(\bar{v}_d)$ es un elemento del subespacio vectorial que generado por los vectores de \mathcal{C} (2.10).

Como $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d\}$ es una base de $m(x)/m(x)^2$, deducimos que

$$\dim(\ker(T_x)) = d - (d - 1 - (r - s + 1)) = r - s + 2$$

por lo que x no sería un punto de rango alto. \square

Observación 2.5.7 Sea $\mathcal{O}_{W,x}$ un morfismo casi-liso, $x \in W$, un punto cerrado, y $\pi(x) = y \in Y$, con $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ existe un sistema regular de parámetros, $\{v_1, \dots, v_d\}$ de modo que

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

como en 2.3.5. Entonces si $v = 1$ ó algún α_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, para $j \in \{s, \dots, r\}$, podemos concluir que x es un punto de rango alto.

Observación 2.5.8 Si $\mathcal{O}_{W,x}$ es un morfismo liso en un punto cerrado $x \in W$, entonces x es un punto de rango alto. Por lo tanto, si $x \in W$ es un punto cerrado que no es de rango alto, necesariamente $\pi(x) \in F$ donde F denota el conjunto de puntos de Y , sobre los que el morfismo π no es liso, como en (2.2.2).

2.6 Morfismos casi-lisos y explosiones.

En el transcurso de esta sección, estudiaremos el comportamiento de los esquemas casi-lisos por explosiones. Para ello, describiremos en primer lugar el haz de módulos de diferenciales con polos que induce un esquema casi-liso sobre su explotado. Con esta información, podemos precisar las condiciones que debe verificar el centro de explosión para que la casi-litud se preserve (*Criterio local para permisibilidad* 2.6.8, y Teorema 2.6.10).

Definición 2.6.1 Sea W un esquema de dimensión d y $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Diremos que un subesquema cerrado $Z \subset W$ es un centro geoméricamente permisible si:

- i. Es irreducible.
- ii. Para cada punto cerrado $x \in Z$ existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$ en $\mathcal{O}_{W,x}$ de modo que si $\pi(x) = y \in Y$, y τ es un parámetro local en $\mathcal{O}_{Y,y}$, entonces:

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$ como en 2.3.5 (i) y (ii),
- $I(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$,

donde $1 \leq t \leq d$ es la codimensión de Z como subesquema de W .
(En particular Z es regular y además tiene cruzamientos normales simultáneamente con todas las fibras del morfismo).

Observación 2.6.2 Si Z es un centro geoméricamente permisible, y consideramos la explosión

$$W_1 \xrightarrow{e} W$$

con centro Z , entonces:

- i. El esquema W_1 es regular.
- ii. La condición 2.3.5 (i) se verifica en todo punto cerrado $x \in W_1$, de modo que la composición,

$$\pi \circ e = \pi_1 : W_1 \longrightarrow Y$$

es un morfismo geoméricamente casi-liso. De este modo podemos definir el \mathcal{O}_{W_1} -módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1) = \omega(E_1)$.

2.6.3 Diremos que un centro geoméricamente permisible, $Z \subset W$, es *horizontal* si el morfismo restringido

$$\pi|_Z : Z \longrightarrow Y,$$

inducido por $\pi : W \longrightarrow Y$, es plano.

Diremos que Z es *vertical* si no es horizontal. Nótese que en tal caso, como Z es irreducible, $\pi(Z)$ es un punto cerrado en Y .

Obsérvese, además, que en la Definición 2.6.1 (ii), Z es vertical si y sólo si $t \geq s$.

2.6.4 Sea $Z \subset W$ un centro geoméricamente permisible de codimensión t . Consideremos la explosión con centro Z :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Sea $\pi_1 = \pi \circ e$. Nuestro propósito, es estudiar el haz de \mathcal{O}_{W_1} -módulos $\omega(\pi_1)$.

Dado un punto cerrado $x \in Z$, con $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ su ideal maximal correspondiente, sea $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{W,x} \subset \mathcal{K}$, donde \mathcal{K} denota el cuerpo total de cocientes del anillo \mathcal{R} (o de W). Como en la definición 2.6.1, existe un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} , $\{v_1, \dots, v_d\}$, de modo que

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$; $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$;
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$.

Para nuestro objetivo, es suficiente con estudiar los dos casos que describimos a continuación:

Caso 1: Supongamos que $1 < s$, y consideramos la carta afín:

$$\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{R} \left[\frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_t}{v_1} \right] \subset \mathcal{K}.$$

Para $i = 2, \dots, t$, definimos $\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_1}$. Entonces:

- Si Z es vertical (i.e. si $t \geq s$),

$$dv_i = v_1 d\bar{v}_i + \bar{v}_i v_1 \frac{dv_1}{v_1}, \text{ si } i \in \{2, \dots, t\} - \{s, \dots, r\}, \quad (2.11)$$

y

$$\frac{dv_j}{v_j} = \frac{d\bar{v}_j}{\bar{v}_j} + \frac{dv_1}{v_1}, \text{ si } i \in \{2, \dots, t\} \cap \{s, \dots, r\}. \quad (2.12)$$

- Si Z es horizontal (i.e. si $t < s$),

$$dv_i = v_1 d\bar{v}_i + \bar{v}_i dv_1, \text{ si } i \in \{2, \dots, t\}. \quad (2.13)$$

Lema 2.6.5 Si Z es vertical, (i.e. si $t \geq s$ en 2.6.4), entonces el conjunto

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.14)$$

genera el haz de módulos $\omega(\pi_1)$ en la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$.

Si Z es horizontal, (i.e. $t < s$ en 2.6.4), entonces el conjunto

$$\left\{ dv_1, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_t, dv_{t+1}, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.15)$$

genera el haz de módulos $\omega(\pi_1)$ en $\text{Spec}(\mathcal{B})$.

Demostración: En la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$, el divisor excepcional, E , está definido por el ideal $\langle v_1 \rangle$. Si denotamos por $k_Z(x)$ el cuerpo residual correspondiente al punto $x \in Z$, la fibra del morfismo

$$e : W_1 \longrightarrow W,$$

sobre el punto x , viene dado por

$$\text{Spec}(k_Z(x)[z_2, \dots, z_t]), \quad (2.16)$$

donde para $i = 2, \dots, t$, el elemento z_i denota la clase de $\frac{v_i}{v_1}$ módulo $\langle v_1 \rangle$.

Sea $\pi(x) = y \in Y$. Para cada punto $x_1 \in \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap E$ con $\pi(x_1) = y$ escogemos un entorno local-étale adecuado de y

$$\alpha_Y : (Y', y') \longrightarrow (Y, y), \quad (2.17)$$

de modo que si

$$\alpha_W : (W', x'_1) \longrightarrow (W, x_1)$$

es un entorno étale inducido por (2.17), entonces

$$k_{W'}(x'_1) = k_Y(\pi(x)).$$

Por (2.16) existen elementos, $\beta_2, \dots, \beta_t \in \mathcal{O}_{Y', q'}$, de modo que el conjunto:

$$\{v_1, \bar{v}_2 - \beta_2, \dots, \bar{v}_t - \beta_t, v_{t+1}, \dots, v_d\}$$

es un sistema regular de parámetros en \mathcal{O}_{W', x'_1} . Denotaremos por π'_1 al morfismo $\pi_1 \circ \alpha_W$.

Para $i = 2, \dots, t$, se tiene que

$$d(v_i - \beta_i) = dv_i$$

por lo que el \mathcal{O}_{W',x'_1} -módulo $\omega(\pi'_1)_{x'_1}$, está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\},$$

si Z es vertical, y por los elementos

$$\left\{ dv_1, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_t, dv_{t+1}, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, \dots, dv_d \right\},$$

si Z es horizontal. Para concluir, es suficiente observar que \mathcal{O}_{W',x'_1} es fielmente plano sobre \mathcal{O}_{W_1,x_1} , y que

$$\omega(\pi'_1)_{x'_1} = \omega(\pi_1) \otimes_{\mathcal{O}_{W_1,x_1}} \mathcal{O}_{W',x'_1}.$$

Distinguiamos los casos (2.14) y (2.15) puesto que si Z es vertical, (y sólo en este caso), debemos añadir polos a lo largo del divisor excepcional. \square

Caso 2: De nuevo, usando la misma notación que en 2.6.4, y suponiendo que $s \leq t \leq r$, consideramos la carta afín:

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A} \left[\frac{v_1}{v_s}, \dots, \frac{v_t}{v_s} \right] \subset \mathcal{K}.$$

Sea $\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_s}, i = 1, \dots, t, i \neq s$, entonces:

$$dv_i = v_s d\bar{v}_i + \bar{v}_i v_s \frac{dv_s}{v_s}, \quad i \in \{1, \dots, t\} - \{s, \dots, r\}, \quad (2.18)$$

y

$$\frac{dv_j}{v_j} = \frac{\bar{v}_j}{\bar{v}_j} = \frac{dv_s}{v_s}, \quad j \in \{1, \dots, t\} \cap \{s, \dots, r\}, j \neq s \quad (2.19)$$

Lema 2.6.6 *El conjunto*

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \frac{d\bar{v}_{s+1}}{\bar{v}_{s+1}}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.20)$$

genera el haz de módulos $\omega(\pi_1)$ en $\text{Spec}(\mathcal{B})$.

Demostración: Basta argumentar de modo similar a como se hizo en la demostración del Lema 2.6.5. \square

Obsérvese que si $1 \leq k < s$, el argumento en las cartas

$$\mathcal{R} \left[\frac{v_1}{v_k}, \dots, \frac{v_t}{v_k} \right]$$

es similar al argumento desarrollado en la carta

$$\mathcal{R} \left[\frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_t}{v_1} \right],$$

y si $s \leq k \leq r$ el argumento a desarrollar en la cartas

$$\mathcal{R} \left[\frac{v_1}{v_k}, \dots, \frac{v_t}{v_k} \right]$$

es similar al desarrollado en la carta

$$\mathcal{R} \left[\frac{v_1}{v_s}, \dots, \frac{v_t}{v_s} \right]$$

2.6.7 Hagamos una recopilación de lo probado hasta este momento:

Dado $\pi : W \rightarrow Y$, un morfismo casi-liso, y $x \in W$, un punto cerrado, con $\pi(x) = y \in Y$, y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$, existe un sistema regular de parámetros, $\{v_1, \dots, v_d\}$ tal que

- Tenemos una expresión para τ :

$$\tau = v : v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r} \quad (2.21)$$

- El $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.22)$$

- Hay una relación que vincula a los generadores de $\omega(\pi)_x$

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.23)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Sea ahora $Z \subset W$ un centro geoméricamente permisible como en 2.6.1, y consideremos de nuevo la explosión con centro Z :

$$e : W_1 \longrightarrow W$$

Denotaremos por π_1 a la composición $\pi \circ e$. En estas condiciones, los Lemas 2.6.5 y 2.6.6, nos permiten describir explícitamente los generadores del haz de \mathcal{O}_{W_1} -módulos $\omega(\pi_1)$. Nos proponemos ahora estudiar la información que nos aporta la relación (2.23) en $\omega(\pi_1)$. De este modo, usando la notación de 2.6.7, y la de los Lemas 2.6.5 y 2.6.6 obtenemos que:

- Si Z es vertical, como en el caso 1 la relación (2.23) da lugar a:

$$\begin{aligned} (a_1 v_1 + a_2 \bar{v}_2 v_1 + \dots + a_{s-1} \bar{v}_{s-1} v_1 + a_s + \dots + a_t) \frac{dv_1}{v_1} + a_2 v_1 d\bar{v}_2 + \\ + \dots + a_{s-1} v_1 d\bar{v}_{s-1} + a_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \\ + a_t \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + a_{t+1} \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \\ + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.24) \end{aligned}$$

- Si Z es horizontal, como en el caso 1 la relación (2.23) da lugar a:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_t \bar{v}_t) dv_1 + a_2 v_1 d\bar{v}_2 + \dots + a_t v_1 d\bar{v}_t + \\ + a_{t+1} dv_{t+1} + \dots + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.25) \end{aligned}$$

- Si Z es vertical, como en el caso 2 la relación (2.23) da lugar a:

$$\begin{aligned} a_1 v_s d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} v_s d\bar{v}_{s-1} + \\ + (a_1 \bar{v}_1 v_s + \dots + a_{s-1} \bar{v}_{s-1} v_s + a_s + \dots + a_t) \frac{dv_s}{v_s} + \\ + a_{s+1} \frac{d\bar{v}_{s+1}}{\bar{v}_{s+1}} + \dots + a_t \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.26) \end{aligned}$$

Nuestro próximo objetivo, es imponer condiciones al centro $Z \subset W$ que nos permitan garantizar que el haz de \mathcal{O}_{W_1} -módulos $\omega(\pi_1)$, es localmente libre de rango $d - 1$. Lo que presentamos a continuación en 2.6.8 es una caracterización local:

Definición 2.6.8 (Criterio local.) Sean $Z \subset W$ un centro geoméricamente permisible y $x \in Z$ un punto cerrado con $\pi(x) = y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Consideremos un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$ como en 2.6.7. En estas condiciones, diremos que

a) Z es permisible de primera clase en x si:

- i. x es un punto de rango alto, ó
- ii. a_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, para algún $j > t$ en (2.23).

b) Z es permisible de segunda clase en x si en (2.23):

$$\langle a_s, \dots, a_r \rangle \subset I(Z)_x, \text{ y } \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \subset I(Z)_x.$$

Diremos que un centro geoméricamente permisible Z es permisible, si en cada uno de sus puntos cerrados verifica alguna de las condiciones (a)(i), (a)(ii) o (b).

Probaremos que el hecho de ser permisible de primera o segunda clase en un punto es intrínseco, i.e., independiente del sistema regular de parámetros escogido en 2.6.7 (véase el Corolario 2.7.11).

Observación 2.6.9 Si Z es un centro horizontal entonces la condición (a.i) implica de manera inmediata la condición (a.ii).

Probamos, a continuación, el resultado central de esta sección: los morfismos casi-lisos se conservan por explosiones en centros permisibles.

Teorema 2.6.10 Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, $Z \subset W$ un centro permisible de codimensión t . Consideremos la explosión con centro Z ,

$$W_1 \xrightarrow{e} W.$$

Entonces el morfismo

$$\pi_1 = \pi e : W_1 \rightarrow Y$$

es casi-liso.

Demostración: Sea $x \in Z$ un punto cerrado, con $\pi(x) = y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ fijamos un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$ como en 2.6.7, de modo que:

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$, con $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad,
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$.

Con estos datos, el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.27)$$

Puesto que $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso en x , en $\omega(\pi)_x$ existe una relación:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0. \quad (2.28)$$

Caso horizontal (Primera clase).

Probaremos que si Z es un centro horizontal permisible entonces necesariamente es permisible de primera clase (Observación 2.7.12). En consecuencia, Z será un centro permisible de primera clase en el punto cerrado x . En particular, ésto significa que en la relación (2.28) existe $j \in \{t+1, \dots, d\}$, tal que $a_j \in \mathcal{O}_{W,x}$.

Sea $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{W,x}$, y sea como en el Lema 2.6.5

$$B = \text{Spec} \left(\mathcal{R} \left[\frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_t}{v_1} \right] \right).$$

Sin pérdida de generalidad, nos basta estudiar el comportamiento del módulo de diferenciales con polos a lo largo de esta carta.

El Lema 2.6.5, nos dice que en la carta afín B , el módulo de diferenciales con polos está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.29)$$

Por 2.6.7 (2.25), la relación

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.30)$$

en $\omega(\pi)_x$, da lugar a la relación:

$$(a_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_t\bar{v}_t)dv_1 + a_2v_1d\bar{v}_2 + \dots + a_tv_1d\bar{v}_t + \\ + a_{t+1}dv_{t+1} + \dots + a_s\frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r\frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.31)$$

a lo largo de la carta afín B .

Como por hipótesis a_j es una unidad para algún $j \in \{t+1, \dots, d\}$, alguna de las coordenadas que aparecen en la relación (2.31) será una unidad. Ésto nos garantiza que W_1 es un esquema casi-liso sobre Y ya que:

- i. Un argumento similar al desarrollado en 2.4.5 nos permite concluir que W_1 es un esquema casi-liso en la carta afín que hemos descrito.
- ii. W_1 se puede cubrir con cartas afines de este tipo, donde un razonamiento similar nos conduce a las mismas conclusiones.

Caso vertical.

Supongamos ahora que Z es vertical. Consideraremos en primer lugar la carta

$$B_1 = \mathcal{R} \left[\frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_t}{v_1} \right],$$

como en el Lema 2.6.5, y sea $B_1 = \text{Spec}(\mathcal{B}_1)$.

Por 2.6.7 (2.24) la relación

$$a_1dv_1 + \dots + a_{s-1}dv_{s-1} + a_s\frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r\frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1}dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.32)$$

en $\omega(\pi)_x$, da lugar a la relación en $\omega(\pi)_1$,

$$(a_1v_1 + a_2\bar{u}_2v_1 + \dots + a_{s-1}\bar{v}_{s-1}v_1 + a_s + \dots + a_t)\frac{dv_1}{v_1} + \\ + a_2v_1d\bar{v}_2 + \dots + a_{s-1}v_1d\bar{v}_{s-1} + a_s\frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + a_t\frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \\ + a_{t+1}\frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + a_r\frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.33)$$

en la carta afín B_1 .

Caso vertical permisible de primera clase.

Si Z es un centro permisible de primera clase en x , en la relación (2.32) existe $j \in \{s, \dots, d\}$ tal que a_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, y por lo tanto entonces al menos uno de los coeficientes de la relación (2.33) es una unidad en \mathcal{B}_1 .

Caso vertical permisible de segunda clase.

Si Z es un centro permisible de segunda clase en x , entonces se tiene que:

$$\langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \subset \langle a_s, \dots, a_d \rangle \subset \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.34)$$

Como $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso en x , en la relación (2.32) existe $j \in \{1, \dots, s-1\}$ tal que a_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Por (2.34) podemos extraer factor común v_1 de la relación (2.33),

$$\begin{aligned} v_1 \left[\left(a_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_{s-1} \bar{u}_{s-1} + \frac{a_s}{v_1} + \dots + \frac{a_t}{v_1} \right) \frac{dv_1}{v_1} + \right. \\ + a_2 d\bar{v}_2 + \dots + a_{s-1} d\bar{v}_{s-1} + \left(\frac{a_s}{v_1} \right) \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \left(\frac{a_t}{v_1} \right) \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \\ + \left(\frac{a_{t+1}}{v_1} \right) \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + \left(\frac{a_r}{v_1} \right) \frac{dv_r}{v_r} + \\ \left. + \frac{a_{r+1}}{v_1} dv_{r+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_1} \right) dv_d \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por definición $\omega(\pi_1)$ es un haz de módulos sin torsión, luego de la relación (2.35) deducimos que:

$$\begin{aligned} \left(a_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_{s-1} \bar{u}_{s-1} + \frac{a_s}{v_1} + \dots + \frac{a_t}{v_1} \right) \frac{dv_1}{v_1} + \\ + a_2 d\bar{v}_2 + \dots + a_{s-1} d\bar{v}_{s-1} + \left(\frac{a_s}{v_1} \right) \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \left(\frac{a_t}{v_1} \right) \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \\ + \left(\frac{a_{t+1}}{v_1} \right) \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + \left(\frac{a_r}{v_1} \right) \frac{dv_r}{v_r} + \\ + \frac{a_{r+1}}{v_1} dv_{r+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_1} \right) dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Recordamos ahora que existe $j \in \{1, \dots, s-1\}$, tal que a_j de la relación (2.32), es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y por tanto en \mathcal{B}_1 .

Sea ahora

$$\mathcal{B}_2 = \left[\frac{v_1}{v_s}, \dots, \frac{v_t}{v_s} \right],$$

y sea $B_2 = \text{Spec}(\mathcal{B}_2)$. Por el Lema 2.6.6, el módulo de diferenciales con polos a lo largo de la carta afín B , está generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \frac{d\bar{v}_{s+1}}{\bar{v}_{s+1}}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.37)$$

Por 2.6.7 (2.26), la relación

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.38)$$

en $\omega(\pi)_x$, da lugar a la relación

$$\begin{aligned} & a_1 v_s d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} v_s d\bar{v}_s + \\ & (a_1 \bar{u}_1 v_s + \dots + a_{s-1} \bar{u}_{s-1} v_s + a_s + \dots + a_t) \frac{dv_s}{v_s} + \\ & a_{s+1} \frac{d\bar{v}_{s+1}}{\bar{v}_{s+1}} + \dots + a_t \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

en $\omega(\pi_1)$ en la carta afín B_2 .

Un argumento similar al aplicado en el caso anterior prueba el teorema tanto si Z es un centro permisible de primera clase en x como si lo es de segunda.

Utilizando un argumento similar al que se expuso en 2.4.5 y puesto que $e^{-1}(x)$ se puede cubrir con cartas afines como las que hemos descrito, podemos concluir que el haz de módulos $\omega(\pi_1)$ es localmente libre de rango $d - 1$. \square

Definimos a continuación, una clase muy particular de centros permisibles:

Definición 2.6.11 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Para cada punto cerrado $y \in Y$ sea

$$\pi^{-1}(y) = E_y = \{H_1^y, \dots, H_{n(y)}^y\},$$

donde $\{H_1^y, \dots, H_{n(y)}^y\}$ es un conjunto de hipersuperficies regulares con cruza-
mientos normales. Diremos que $Z \subset W$ es un centro combinatorio si es
irreducible y para algún punto cerrado $y \in Y$:

$$Z = H_{j_1}^y \cap \dots \cap H_{j_k}^y$$

con $j_i \in \{1, \dots, r(y)\}$ para $i = 1, \dots, k$, $y \in Y$, $1 \leq k \leq n(y)$.

Observación 2.6.12 Comprobaremos a continuación que si Z es un centro combinatorio, entonces:

- i. Z es un centro vertical.
- ii. Para todo punto cerrado $x \in Z$, el centro Z es permisible de primera clase.

Sea $x \in Z$ un punto cerrado, con $\pi(x) = y$, y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ fijamos un sistema regular de parámetros ordenado de manera adecuada,

$$\{v_1, \dots, v_d\}, \quad (2.40)$$

de modo que,

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$, con v una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, y $\alpha_s, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}_{>0}$,
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_s, \dots, v_k \rangle$, con $s \leq k \leq r$, (luego Z es vertical).

Con estos datos, el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.41)$$

Puesto que el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ es casi-liso, existe una relación que vincula a los elementos de (2.41):

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.42)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Ahora se observa de inmediato que alguna de las condiciones de 2.6.8 ((a.i) ó (a.ii)) se verifica para Z .

2.7 El Ideal Jacobiano.

En la sección 2.6 hemos trabajado con un criterio local de permisibilidad con el que hemos comprobado que se preserva la casi-lisitud por explosiones, (Definición 2.6.8, Teorema 2.6.10). Uno de los objetivos de esta sección será comprobar que la Definición 2.6.8 no depende de las coordenadas escogidas en un punto. Para ello, introduciremos una nueva herramienta: el Ideal Jacobiano correspondiente a un subesquema cerrado. Este invariante, nos permitirá también, decidir cuándo la restricción de un morfismo casi-liso a un subesquema cerrado es un morfismo casi-liso.

2.7.1 Dado un morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ casi-liso, hemos construido el haz de \mathcal{O}_W -módulos $\omega(\pi)$, junto con una derivación

$$d : \mathcal{O}_W \longrightarrow \omega(\pi). \quad (2.43)$$

Consideremos ahora un subesquema cerrado $Z \subset W$ definido por un haz de ideales $\mathcal{I}(Z)$. Con estos datos, construimos la sucesión exacta de \mathcal{O}_Z -módulos:

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0, \quad (2.44)$$

donde \mathcal{C} denota el conúcleo del morfismo d ([V3, §4]).

Utilizando la sucesión exacta (2.44), definiremos de un modo natural, un haz de diferenciales con polos logarítmicos, “restringido” a Z cuando éste sea un centro horizontal geoméricamente permisible.

Puesto que $\omega(\pi) \otimes \mathcal{O}_Z$ es un haz de \mathcal{O}_Z -módulos localmente libre, a partir la sucesión exacta (2.44) podemos definir Ideales de Fitting asociados al conúcleo \mathcal{C} .

2.7.2 Si $Z \subset W$ es un subesquema plano sobre Y , es natural considerar ideales de Fitting, de orden igual a la codimensión de Z , en la sucesión exacta (2.44). Obsérvese, que en este caso, tiene sentido plantearse si la restricción

$$\pi|_Z : Z \longrightarrow Y$$

es un morfismo casi-liso, ya que el morfismo restringido es plano.

Supongamos que Z es un centro horizontal permisible. Sea $x \in Z$ un punto cerrado con $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Fijemos un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$, $\{v_1, \dots, v_d\}$, de modo que como en 2.6.1,

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

con $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad, y además

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle.$$

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\},$$

y puesto que el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, existe una relación en $\omega(\pi)_x$:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0,$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

De hecho, si Z es un centro horizontal permisible, entonces existe algún $i \in \{t+1, \dots, d\}$ tal que $a_i \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad. Como consecuencia, localmente en x , la sucesión exacta (2.44) nos dice que \mathcal{C}_x es un \mathcal{O}_Z -módulo generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_{t+1}, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r}, d\bar{v}_{r+1}, \dots, d\bar{v}_d \right\}$$

ligados por la relación:

$$\bar{a}_{t+1} d\bar{v}_{t+1} + \dots + \bar{a}_{s-1} d\bar{v}_{s-1} + \bar{a}_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \bar{a}_r \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \bar{a}_{r+1} d\bar{v}_{r+1} + \dots + \bar{a}_d d\bar{v}_d = 0$$

donde \bar{a}_k denota la clase de a_k en $\mathcal{O}_{Z,x}$ y algún \bar{a}_i es una unidad, para $i \in \{t+1, \dots, d\}$.

En este caso, claramente $\pi_Z : Z \rightarrow Y$ es un morfismo casi-liso, y

$$\omega(\pi|_Z) = \mathcal{C}.$$

2.7.3 Supongamos ahora que $Z \subset W$, es un subesquema vertical. Si suponemos, por ejemplo, que Z es irreducible, entonces $\pi(Z) = y \in Y$, donde y es un punto cerrado en Y . Sea $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Puesto que $\pi : W \rightarrow Y$ es un morfismo casi-liso, existe un conjunto hipersuperficies regulares con cruzamientos normales en W , de modo que.

$$\pi^{-1}(y) = \{H_1, \dots, H_l\}.$$

Si las ordenamos de manera adecuada, podemos suponer que

$$Z \subset H_1 \cap \dots \cap H_l,$$

donde $1 \leq l \leq n$.

Si además suponemos que Z es un subesquema regular, en cada punto cerrado x , existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$, de modo que

- $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_l^{\alpha_l}$, donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad, y
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_l, f_{l+1}, \dots, f_{l+k} \rangle$;

donde $l+k$ es la codimensión de Z , y $f_j \in \mathcal{O}_{W,x}$, para $j = l+1, \dots, l+k$.

Con estos datos, podemos describir la imagen por d de $\mathcal{I}(Z)_x / \mathcal{I}(Z)_x^2$, en la sucesión exacta (2.44). Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \langle dv_1, \dots, dv_l, d(f_{l+1}), \dots, d(f_{l+k}) \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)_x &= \\ = \langle d(f_{l+1}), \dots, d(f_{l+k}) \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)_x \end{aligned}$$

ya que para $i = 1, \dots, l$:

$$dv_i = v_i \left(\frac{dv_i}{v_i} \right) \in \mathcal{I}(Z)_x \omega(\pi)_x.$$

A la vista de este resultado, se deduce fácilmente que el ideal de Fitting generado por los menores de orden igual a la codimensión de Z es nulo, así que no nos aporta demasiada información, y sólo comenzamos a obtener información relevante considerando el ideal generado por menores de orden k .

2.7.4 Sea Z un subesquema vertical e irreducible de W , con $\pi(Z) = y$ un punto cerrado en Y . Consideremos el conjunto de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales que conforman la fibra del morfismo $\pi : W \rightarrow Y$, sobre el punto y :

$$E_y = \pi^{-1}(y) = \{H_1, \dots, H_n\}.$$

Bajo estas condiciones definimos el número natural

$$l_Z = \# \{H_i \in E_y : Z \subset H_i\}.$$

Si Z es horizontal definimos $l_Z = 0$.

Definición 2.7.5 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $Z \subset W$ un subesquema irreducible de codimensión t . Consideremos la sucesión exacta

$$\mathcal{I}(Z)/\mathcal{I}(Z)^2 \xrightarrow{d} \omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0. \quad (2.45)$$

Definimos el Ideal Jacobiano de Z , como el haz de ideales de Fitting generado localmente por todos los menores de orden $(t - l_Z) \times (t - l_Z)$ de $\text{Im}(d) \subset \omega(\pi) \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Z$, y lo denotaremos por Δ_Z .

Observación 2.7.6 Si Z es un centro horizontal, entonces $l_Z = 0$ en 2.7.4, y la Definición 2.7.5 coincide con la ya introducida en [V3, §4].

2.7.7 Cálculo del Jacobiano para centros geoméricamente permisibles.

Sea $Z \subset W$ un centro geoméricamente permisible de codimensión t . Incluimos a continuación un cálculo explícito del Ideal Jacobiano de Z en un punto cerrado $x \in Z$.

Sea $x \in Z$ un punto cerrado, con $\pi(x) = y \in Y$, y sea $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ su ideal jacobiano correspondiente. En $\mathcal{O}_{W,x}$, escogemos un sistema regular de parámetros

$$\{v_1, \dots, v_d\} \quad (2.46)$$

de modo que

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$, con v una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$ para $i = s, \dots, r$;
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado localmente en x por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}, \quad (2.47)$$

y puesto que $\pi : W \rightarrow Y$ es un morfismo casi-liso, existe una relación que vincula a estos generadores:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.48)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Caso horizontal.

Por la Definición 2.7.5, para construir $\Delta_{Z,x}$ debemos considerar los menores de orden $t \times t$ de $\text{Im}(d)$ en la sucesión exacta (2.45).

Es posible, sin embargo, darle otra lectura a esta construcción. El $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo libre $\omega(\pi)_x$ se puede interpretar como el cociente del $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo libre de rango d (con una base en correspondencia con los elementos de (2.47)) por la relación definida por las coordenadas en (2.48).

En estas condiciones, a la matriz correspondiente a $\text{Im}(d)$, le añadimos una fila, que corresponderá a la relación (2.48). Denotaremos a esta nueva matriz por D . De este modo, podemos calcular $\Delta_{Z,x}$ tomando menores de orden $t+1$ en la matriz D .

Puesto que $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ se tiene que

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_t & \dots & a_s & \dots & a_r & \dots & a_d \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Y ahora, se obtiene fácilmente que

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \pmod{\langle v_1, \dots, v_t \rangle}. \quad (2.49)$$

Caso vertical.

Sea $H_i = V(< v_i >)$, para $i = s, \dots, r$, y sea

$$l_Z = \#\{H_i : Z \subset H_i\}$$

como en 2.7.4.

Por la Definición 2.7.5, para calcular $\Delta_{Z,x}$ debemos considerar los menores de orden $(t - l_Z) \times (t - l_Z)$, en la matriz de $\text{Im}(d)$ en la sucesión exacta (2.45) de 2.7.5. Sin embargo podemos argumentar de modo similar a como lo hemos hecho en el caso horizontal, y calcular $\Delta_{Z,x}$ utilizando los menores de orden $(t - l_Z + 1) \times (t - l_Z + 1)$ de la matriz correspondiente a $\text{Im}(d)$ a la que agregamos una fila correspondiente a la relación (2.48). Como para $i \in \{s, \dots, r\}$ se tiene que

$$dv_i = v_i \left(\frac{dv_i}{v_i} \right),$$

deducimos que:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{s-1} & a_s & \dots & a_t & \dots & a_r & \dots & a_d \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v_s & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & v_t & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Así se concluye de manera inmediata que

$$\Delta_{Z,x} = < a_s, \dots, a_d > \pmod{< v_1, \dots, v_t >}. \quad (2.50)$$

En [V3, 4.3] se prueba el siguiente teorema sólo para centros horizontales:

Teorema 2.7.8 [V3, 4.3] *Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, $Z \subset W$ un subesquema plano sobre Y , irreducible y de codimensión t . Entonces $\Delta_Z = \mathcal{O}_Z$ si y sólo si Z es un centro horizontal permisible.*

Incluimos aquí una nueva versión del Teorema 2.7.8, en la tratamos tanto con centros verticales como horizontales. En este sentido, el Teorema 2.7.9 es una generalización del Teorema 2.7.8.

Teorema 2.7.9 *Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, $Z \subset W$ un subesquema irreducible de codimensión t . Entonces:*

- i. *Si Z es un centro geoméricamente permisible y existe un punto cerrado $x \in Z$ en el que $\Delta_{Z,x} = 0$, entonces $\Delta_Z = 0$ y Z es un centro vertical permisible.*
- ii. *Si $\Delta_Z \subset \mathcal{O}_Z$ no es el haz nulo entonces $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$ si y sólo si Z es un centro permisible en x .*

Demostración:

- i. Sea $Z \subset W$ un centro geoméricamente permisible. Si existe un punto cerrado $x \in Z$ tal que $\Delta_{Z,x} = 0$, entonces como Z es irreducible y $\omega(\pi)$ es coherente, el haz de ideales Δ_Z es idénticamente nulo en \mathcal{O}_Z .

Sea ahora $x \in Z$, un punto cerrado con $\pi(x) = y$, y sea $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ su ideal maximal correspondiente. En $\mathcal{O}_{W,x}$ existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$ como en 2.6.1, de modo que

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

con $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad y además

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle,$$

con $s \leq t \leq r$ (veremos en el Corolario 2.7.11 y en la Observación 2.7.12, si Δ_Z es idénticamente nulo en \mathcal{O}_Z , entonces necesariamente Z es vertical).

Puesto que el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, el módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$, está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}$$

ligados por una relación:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0,$$

donde algún coeficiente a_i es una unidad, para algún $i \in \{1, \dots, d\}$. Ahora, un cálculo explícito como en 2.7.7 (2.50), nos dice que

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \pmod{\mathcal{I}(Z)_x}$$

Como por hipótesis $\Delta_{Z,x} = 0$, se tiene que

$$\langle a_s, \dots, a_d \rangle \subset \mathcal{I}(Z)_x,$$

por lo que concluimos que, necesariamente, Z es un centro permisible de segunda clase en x .

- ii. El caso horizontal está probado en [V3], y en la prueba que aquí exponemos sólo trataremos el caso vertical para evitar tener que considerar, repetidamente y por separado, el caso horizontal y el vertical. Sin embargo, y como se verá en el desarrollo de la demostración, ésta es perfectamente adaptable para el caso horizontal.

Supongamos, por tanto, que Z es vertical. Sea $\pi(Z) = y \in Y$ un punto cerrado con ideal maximal $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Sean como en 2.7.4

$$E_y = \pi^{-1}(y) = \{H_1, \dots, H_r\}$$

$$l_Z = \#\{H_i \in E_y : Z \subset H_i\}.$$

Como Z es vertical, $l_Z \geq 1$.

(\Rightarrow) Sea $x \in Z$ un punto cerrado, (nótese que $\pi(x) = y$), y supongamos que $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$. Queremos probar que Z es permisible en el punto x . Para ello escogeremos un sistema regular de parámetros adecuado en $\mathcal{O}_{W,x}$, de modo que podamos aplicar el *criterio local de permisibilidad* que ya se introdujo en 2.6.8.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe un sistema regular de parámetros $\{v_1, \dots, v_d\}$, tal que:

- tenemos una expresión para τ :

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad, y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$.

- para $i = 1, \dots, r$, $H_i = V(\langle v_i \rangle) \in E_y$,

- además, se tiene la inclusión

$$Z \subset H_1 \cap \dots \cap H_l.$$

Puesto que por hipótesis

$$\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x},$$

existen elementos $f_1, \dots, f_{t-l} \in \mathcal{I}(Z)_x \subset \mathcal{O}_{W,x}$, y $D_1, \dots, D_{t-l} \in \omega^*(\pi)_x$, tales que

$$\text{Det}(D_i(f_j)) = u$$

donde u es una unidad en $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Afirmación: Los elementos

$$\{v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{t-l}\}$$

se pueden extender a un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Para probar esta afirmación, basta probar que los elementos $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{t-l}\}$ son linealmente independientes en el $k(x)$ -espacio vectorial $m(x)/m(x)^2$. (Para $a \in m(x)$, \bar{a} denota su clase en $m(x)/m(x)^2$).

Obviamente

$$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r\}$$

es un conjunto de elementos linealmente independientes en $m(x)/m(x)^2$, puesto que por hipótesis

$$\{v_1, \dots, v_d\}$$

es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por otro lado,

$$\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{t-l}\}$$

es también un conjunto de elementos linealmente independientes en $m(x)/m(x)^2$, ya que como

$$\text{Det}(D_i(f_j)) = u,$$

la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \overline{D} : m(x)/m(x)^2 &\longrightarrow \underbrace{k(x) \times \dots \times k(x)}_{t-l} \\ \overline{a} &\longrightarrow (\overline{D_1(a)}, \dots, \overline{D_{t-l}(a)}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

envía los vectores $\{\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_{t-l}\}$ a $(t-l)$ vectores linealmente independientes en $k(x)^{t-l}$.

Supongamos que existen elementos $c_1, \dots, c_{r+t-l} \in k(x)$, tales que:

$$c_1 \overline{v}_1 + \dots + c_r \overline{v}_r + c_{r+1} \overline{f}_1 + \dots + c_{r+t-l} \overline{f}_{t-l} = 0, \quad (2.52)$$

y supongamos que para $i \in \{r+1, \dots, r+t-l\}$ algún coeficiente c_i es no nulo. En tal caso y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_{r+t-l} \neq 0$, por lo tanto:

$$\overline{f}_{r+t-l} = -c_{r+t-l}^{-1} (c_1 \overline{v}_1 + \dots + c_r \overline{v}_r + c_{r+1} \overline{f}_1 + \dots + c_{r+t-l-1} \overline{f}_{t-l-1}). \quad (2.53)$$

y entonces,

$$\overline{D}(\overline{f}_{t-l}) = -c_{r+t-l}^{-1} c_{r+1} \overline{D}(\overline{f}_1) + \dots - c_{r+t-l}^{-1} c_{r+t-l-1} \overline{D}(\overline{f}_{t-l-1}),$$

lo que contradice el hecho de que

$$\text{Det}(D_i(f_j)) = u.$$

Luego, necesariamente, $c_i = 0$, para $i \in \{r+1, \dots, r+t-l\}$, y la expresión (2.52), queda:

$$c_1 \overline{v}_1 + \dots + c_r \overline{v}_r = 0,$$

de donde deducimos que $c_i = 0$, para $i = 1, \dots, r$.

En consecuencia,

$$\langle v_1, \dots, v_l, f_1, \dots, f_{t-l} \rangle$$

es un ideal primo regular contenido en $\mathcal{I}(Z)_x$.

Como Z es un subesquema irreducible de codimensión t , necesariamente

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t, f_1, \dots, f_{t-l} \rangle.$$

Además podemos escoger un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$, $\{u_1, \dots, u_d\}$, de modo que

- $\tau = u \cdot u_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot u_r^{\alpha_r}$, donde $u \in \mathcal{O}_{W,x}$, es una unidad, $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$, y $r - s + 1 = l$, y además
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle u_1, \dots, u_t \rangle$, con $s \leq t \leq r$.

El módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$, está generado por los elementos

$$\left\{ du_1, \dots, du_{s-1}, \frac{du_s}{u_s}, \dots, \frac{du_t}{u_t}, \dots, \frac{du_r}{u_r}, du_{r+1}, \dots, du_d \right\} \quad (2.54)$$

vinculados por una relación:

$$a_1 du_1 + \dots + a_{s-1} du_{s-1} + a_s \frac{du_s}{u_s} + \dots + a_r \frac{du_r}{u_r} + a_{r+1} du_{r+1} + \dots + a_d du_d = 0 \quad (2.55)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Un cálculo explícito como en 2.7.7 (2.50), nos muestra que

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z)_x.$$

Como por hipótesis

$$\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x},$$

existe $i \in \{t+1, \dots, d\}$, tal que a_i es una unidad en la relación (2.55), y como consecuencia Z es un centro permisible de primera clase en el punto x .

(\Leftarrow) Supongamos ahora que Z es un centro vertical permisible. Sea $x \in Z$ un punto cerrado con $\pi(x) = y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Nuestro objetivo es probar que entonces $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$.

Podemos escoger un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,x}$,

$$\{v_1, \dots, v_t, \dots, v_d\},$$

de modo que

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$$

y

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

con $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad, y $s \leq t \leq r$.

El módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$, está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_t}{v_t}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.56)$$

ligados por una relación:

$$\begin{aligned} a_1 dv_1 + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_t \frac{dv_t}{v_t} + \dots + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \\ + \dots + \dots + a_d dv_d = 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

con $t - s + 1 = l$, y alguno de los coeficientes a_i una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Puesto que por hipótesis:

$$0 \neq \Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(Z),$$

y el centro Z es permisible, necesariamente debe ser permisible de primera clase. Ésto quiere decir que a_i es una unidad, para algún $i \geq s$, y por lo tanto

$$\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}. \quad \square$$

Observación 2.7.10 Por el Teorema 2.7.9 y los cálculos explícitos de 2.7.7, podemos deducir, que si $Z \subset W$ es centro permisible en un punto cerrado $x \in Z$, entonces es permisible de primera clase en x si y sólo si $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$ y es permisible de segunda clase en x si y sólo si $\Delta_{Z,x} = 0$.

Con ayuda del Teorema 2.7.9, nos encontramos en condiciones de justificar el *Criterio local de Permisibilidad* que hemos introducido en 2.6.8. Es este uno de los propósitos del siguiente corolario:

Corolario 2.7.11 *Sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible y sea $x \in Z$ un punto cerrado. Entonces Z es un centro permisible de primera o segunda clase en x independientemente del sistema regular de parámetros escogido en $\mathcal{O}_{W,x}$ para la presentación de $\mathcal{I}(Z)_x$. Además, si Z es permisible en un punto cerrado x entonces existe un abierto que contiene a x en el que Z es permisible.*

Demostración: Sea $Z \subset W$ un subesquema irreducible, y $x \in Z$ un punto cerrado. Por el Teorema 2.7.9 y la Observación 2.7.10, Z es permisible de primera clase en x si y sólo si $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$, y es permisible de segunda clase en x si es geoméricamente permisible en x y $\Delta_{Z,x} = 0$. Ahora basta observar que estos ideales de Fitting son independientes del sistema regular de parámetros escogido para su construcción, lo que prueba la primera parte del corolario.

En cuanto a la segunda afirmación, basta observar que si Z es permisible de primera clase en un punto, entonces $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$, y por tanto existe un abierto $U \subset Z$ con $x \in U$ donde esto sucede. En cambio, si Z es permisible de segunda clase en x entonces $\Delta_{Z,x} = 0$, y como Z es irreducible y $\omega(\pi)$ es un haz de módulos coherente, necesariamente $\Delta_Z = 0$. \square

Observación 2.7.12 Si $Z \subset W$ es un centro horizontal permisible, es, en particular, regular, y por tanto genéricamente liso sobre el esquema Y . Es decir, existe un abierto no vacío $V \subset Y$ tal que el morfismo restringido

$$\pi|_{\pi^{-1}(V) \cap Z}: \pi^{-1}(V) \cap Z \longrightarrow V$$

es liso. Por lo tanto, para todo punto cerrado $x \in \pi^{-1}(V) \cap Z$ el centro Z es permisible de primera clase. Podemos concluir entonces que si un centro horizontal es permisible en un punto, entonces es permisible de primera clase en ese punto.

Observación 2.7.13 Por la Observación 2.7.10, el Teorema 2.7.9 nos da una condición necesaria y suficiente para que un subesquema cerrado $Z \subset W$ sea permisible de primera clase. En cambio puede suceder que $Z \subset W$ sea un subesquema cerrado no permisible, con $\Delta_Z = 0$. Tal cosa es posible porque el hecho de que $\Delta_Z = 0$ no garantiza que el centro sea geoméricamente permisible. Ilustramos a continuación una situación de este tipo.

Ejemplo 2.7.14 Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Consideremos el anillo

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3, u_4] / \langle p - u_1^p u_2^p u_4(1 + u_2 + u_2 u_3) \rangle$$

sobre $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$. Sea $W = \text{Spec}(\mathcal{A})$. Para evitar una escritura excesivamente complicada, dado un elemento $a \in \mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3, u_4]$ denotaremos también por a a su clase en el anillo \mathcal{A} . Sea x el punto cerrado de W correspondiente al ideal maximal

$$\langle u_1, u_2, u_3, u_4, p \rangle.$$

Comprobaremos en primer lugar que el morfismo natural

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

es casi-liso. Claramente W es un esquema íntegro y regular, y el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ es separado, de tipo finito y plano sobre Y . Comprobaremos a continuación que $\omega(\pi)$ es localmente libre de rango 3.

Sea $y = \pi(x)$ con $m(y) = \langle p \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Sea $U = Y - \{y\}$. Es claro que el morfismo

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

es liso. Nos resta por tanto analizar la fibra de $\pi : W \longrightarrow Y$ sobre el punto y .

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$, está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{du_1}{u_1}, \frac{du_2}{u_2}, du_3, \frac{du_4}{u_4} \right\}. \quad (2.58)$$

La relación que vincula a estos generadores se obtiene al considerar la expresión:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dp}{p} = \frac{d(u_1^p u_2^p (1 + u_2 + u_2 u_3))}{u_1^p u_2^p (1 + u_2 + u_2 u_3)} = \\ &= pu_1^p u_2^p u_4(1 + u_2 + u_2 u_3) \frac{du_1}{u_1} + u_1^p u_2^p u_4 [(1 + u_2 + u_2 u_3)p + u_2(1 + u_3)] \frac{du_2}{u_2} + \\ &\quad + u_1^p u_2^p u_4 u_2 du_3 + u_1^p u_2^p u_4 (1 + u_2 + u_2 u_3) \frac{du_4}{u_4} = \\ &= u_1^p u_2^p u_4 \left[p(1 + u_2 + u_3 u_2) \frac{du_1}{u_1} + [(1 + u_2 + u_2 u_3)p + \right. \\ &\quad \left. u_2(1 + u_3)] \frac{du_2}{u_2} + u_2 du_3 + (1 + u_2 + u_2 u_3) \frac{du_4}{u_4} \right] = 0 \end{aligned}$$

Por lo que deducimos que la relación que buscábamos es:

$$p(1 + u_2 + u_2u_3)\frac{du_1}{u_1} + [(1 + u_2 + u_2u_3)p + u_2(1 + u_3)]\frac{du_2}{u_2} + \\ + u_2du_3 + (1 + u_2 + u_2u_3)\frac{du_4}{u_4} = 0 \quad (2.59)$$

Como el coeficiente que acompaña a $\frac{du_4}{u_4}$ en la relación (2.59), es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso en el punto x . Ahora, utilizando un argumento similar al desarrollado en 2.4.5 podemos concluir que W es un esquema casi-liso sobre Y .

Consideremos ahora el subesquema regular $Z \subset W$ determinado por el ideal:

$$\mathcal{I}(Z) = \langle u_2, u_4 - u_3^p \rangle.$$

Claramente Z no es un centro geoméricamente permisible, así que no es permisible.

Como $l_Z = 1$, el ideal jacobiano de Z en el punto x , viene dado por:

$$\Delta_{Z,x} = \langle p^2u_3^{p-1}, pu_4, pu_3^{p-1} \left(p + \frac{u_2(1+u_3)}{1+u_2+u_2u_3} \right), u_4 \left(p + \frac{u_2(1+u_3)}{1+u_2+u_2u_3} \right), \\ u_4 \frac{u_2}{1+u_2+u_2u_3} + pu_3^{p-1}(1+u_2+u_2u_3) \rangle \pmod{\langle u_2, u_4 - u_3^p \rangle} = \\ = 0 \pmod{\langle u_2, u_4 - u_3^p \rangle}.$$

Observación 2.7.15 Si $Z \subset W$, y $\Delta_Z = 0$, cabría plantearse la posibilidad de considerar además Ideales de Fitting de orden menor, con objeto de completar la información procedente del Ideal Jacobiano. Sin embargo, el Ejemplo 2.7.14, ya nos ofrece una respuesta negativa en este sentido, pues si denotamos por Δ_Z^j los Ideales de Fitting construidos con menores de orden j , lo que obtenemos es:

$$0 = \Delta_Z = \Delta_Z^1 = 0 \subset \Delta_Z^0 = \mathcal{O}_{Z,x}$$

lo que no es una información muy relevante.

Proposición 2.7.16 Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sean $V \subset Z \subset W$ dos centros geoméricamente permisibles. Si existe un punto cerrado $x \in Z$ en el que Z no es permisible (o es permisible de segunda clase) y

$$\Delta_{Z,x} \subset \mathcal{I}(V)_x \pmod{\mathcal{I}(Z)_x}$$

entonces V es un centro permisible de segunda clase en todos sus puntos.

Demostración: Comprobaremos que

$$\Delta_{V,x} = 0 \bmod \mathcal{I}(V)_x.$$

Como V es geoméricamente permisible el Teorema 2.7.9 nos asegura que con esta condición V es un centro permisible.

Sea $\pi(x) = y \in Y$, con $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ fijamos un sistema regular de parámetros

$$\{v_1, \dots, v_d\} \quad (2.60)$$

de modo que

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$, para $i = s, \dots, r$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.61)$$

y hay una relación que los vincula

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.62)$$

con a_i una unidad, para algún $i \in \{1, \dots, d\}$.

Supongamos además que

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle.$$

Distinguiremos dos casos, según Z sea horizontal o vertical:

- Si Z es horizontal entonces $1 \leq t < s$.

Entonces por 2.7.7 (2.49),

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.63)$$

Como $V \subset Z$, podemos suponer que, ordenando adecuadamente los parámetros en (2.60), o bien se tiene:

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t, v_s, \dots, v_k, v_{r+1}, \dots, v_l \rangle, \quad (2.64)$$

con $s \leq k \leq r$ y $r+1 \leq l \leq d$, y en tal caso utilizando los resultados de 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{V,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_s, \dots, a_r, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(V)_x; \quad (2.65)$$

o bien

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t, v_{r+1}, \dots, v_l \rangle, \quad (2.66)$$

con $r+1 \leq l \leq d$, en cuyo caso por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{V,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_r, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(V)_x. \quad (2.67)$$

Como por hipótesis:

$$\Delta_{Z,x} \subset \mathcal{I}(V)_x \bmod \mathcal{I}(Z)_x$$

por (2.65) y (2.67) se tiene que

$$\Delta_{V,x} = 0 \bmod \mathcal{I}(V)_x.$$

Obsérvese que como consecuencia no es posible que el centro V sea horizontal (2.7.11 y 2.7.12). Por lo tanto no se puede dar una situación con V como en (2.66).

- Si Z es vertical suponemos ordenado el sistema regular de parámetros (2.60) de modo que $s \leq t \leq r$.

En este caso, por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.68)$$

Supongamos, además que, ordenando el sistema regular de parámetros de modo adecuado,

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t, \dots, v_k, v_{r+1}, \dots, v_l \rangle,$$

con $t \leq k \leq r$, y $r+1 \leq l \leq d$.

Entonces, por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{V,x} = \langle a_s, \dots, a_r, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(V)_x. \quad (2.69)$$

De nuevo, como por hipótesis

$$\Delta_{Z,x} \subset \mathcal{I}(V)_x,$$

por (2.69) y (??) se tiene que

$$\Delta_{V,x} = 0 \bmod \mathcal{I}(V)_x. \quad \square$$

2.8 Casi-lisitud para subesquemas inmersos.

Continuando la línea de trabajo iniciada en la sección 2.7, nos planteamos el ahora el siguiente interrogante: Sea W un esquema de dimensión d ,

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

un morfismo casi-liso, y $Z \subset W$ un subesquema cerrado y plano, ¿cuándo es el morfismo restringido

$$\pi|_Z : Z \longrightarrow Y$$

un morfismo casi-liso?

Si $Z \subset W$ es un centro horizontal geoméricamente permisible de codimensión t , ya hemos comprobado, que existe un modo natural de restringir el haz de diferenciales con polos $\omega(\pi)$ a $\omega(\pi|_Z)$ (2.7.1). Además, el Teorema 2.7.8, que aparece en [V3, 4.3], nos da una condición suficiente para que el haz de \mathcal{O}_Z -módulos, $\omega(\pi|_Z)$, sea localmente libre de rango $d - t - 1$. Adoptaremos como definición de subesquema casi-liso esta condición (Definición 2.8.1). Sin embargo comprobaremos que esta condición no es en realidad necesaria, (Observación 2.8.2, Ejemplos 2.8.3 y 2.8.4).

Definición 2.8.1 Diremos que un subesquema cerrado $Z \subset W$ es un subesquema casi-liso si es un centro horizontal permisible. En tal caso

$$\pi|_Z : Z \longrightarrow Y$$

denotará el morfismo casi-liso definido por la restricción de

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

Observación 2.8.2 Sea $Z \subset W$ un centro horizontal geoméricamente permisible, y sean Δ_Z , y Δ_Z^Z , los jacobianos de Z referidos a la inmersión y al morfismo restringido $\pi|_Z$, respectivamente. En este caso se puede comprobar que ambos están relacionados: Δ_Z^Z es el ideal Δ_Z del que hemos eliminado las componentes de altura 1 (2.7.2). En este sentido, puede muy bien suceder que $Z \subset W$ no sea un esquema casi-liso visto como subesquema de W , y que sin embargo, el morfismo restringido $\pi|_Z : Z \longrightarrow Y$ sea casi-liso. Ilustramos una situación de este tipo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.8.3

Consideremos el anillo:

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v_1, v_2] / \langle p - v_1^p(1 + v_2) \rangle,$$

los esquemas $W = \text{Spec}(\mathcal{A})$ y $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, p un primo en \mathbb{Z} y el morfismo natural:

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

Como ya hemos señalado en otras ocasiones, para evitar notaciones excesivamente recargadas dado un elemento $a \in \mathbb{Z}[v_1, v_2]$ denotaremos también por aa su clase en el anillo \mathcal{A} .

Sea x el punto cerrado

$$V(\langle v_1, v_2, p \rangle)$$

Claramente W es un esquema regular e íntegro, y el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ es de tipo finito, separado y plano sobre Y . Este morfismo es liso sobre todos los puntos cerrados de Y salvo sobre el punto correspondiente al ideal maximal $\langle p \rangle$. Sea $y = V(\langle p \rangle)$.

El módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2 \right\} \quad (2.70)$$

vinculados por la relación

$$p(1 + v_2) \frac{dv_1}{v_1} + dv_2 = 0 \quad (2.71)$$

Por lo que es claro que $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso en el punto x . De esta última expresión y razonando como en 2.4.5 se deduce que $\pi : W \longrightarrow Y$ es casi-liso en cualquier punto cerrado de la fibra sobre el punto y .

Consideremos ahora el subesquema $Z \subset W$ determinado por el ideal

$$\mathcal{I}(Z) = \langle v_2 \rangle.$$

Claramente, Z es un centro geoméricamente permisible para el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$.

Por 2.7.7 (2.49), se tiene que

$$\Delta_{Z,x} = \langle p \rangle \mod \mathcal{I}(Z)_x,$$

por lo que Z no es casi-liso como subesquema inmerso en W . Sin embargo

$$\mathcal{O}_Z = \mathbb{Z}[V_1] / \langle p - V_1^p \rangle,$$

donde V_1 denota la clase de v_1 en $\mathcal{A} / \langle v_2 \rangle$. Es claro que

$$\Delta_{Z,x}^Z = \mathcal{O}_{Z,x}$$

(ver Observación 2.4.2), y por tanto el morfismo

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y$$

es casi liso.

Cuando $Z \subset W$ no es un centro geoméricamente permisible, la relación entre los jacobianos Δ_Z y Δ_Z^Z ya no es tan obvia:

Ejemplo 2.8.4 Sea

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v_1, v_2]$$

$W = \text{Spec}(\mathcal{A})$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ y $x = V(\langle p, v_1, v_2 \rangle)$. De nuevo consideramos el morfismo natural

$$\pi: W \longrightarrow Y$$

que es liso y por tanto casi-liso.

Sea $Z \subset W$ el subesquema cerrado determinado por el ideal

$$\mathcal{I}(Z) = \langle p - v_1 v_2 \rangle.$$

El subesquema Z es plano sobre Y , pero no es geoméricamente permisible. Un sencillo cálculo nos dice que:

$$\Delta_{Z,x} = \langle v_1, v_2 \rangle \bmod \mathcal{I}(Z)$$

por lo que Z no es un subesquema casi-liso como subesquema inmerso de W . Sin embargo, el morfismo restringido:

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y$$

es casi-liso, puesto que $\omega(\pi|_Z)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2} \right\},$$

vinculados por la relación:

$$\frac{dv_1}{v_1} + \frac{dv_2}{v_2} = 0.$$

Trataremos problemas en los que trabajaremos con subesquemas casi-lisos, inmersos en un medio ambiente casi-liso. Nos gustaría, por lo tanto, garantizar que por explosiones en centros permisibles para el medio ambiente no perdemos la casi-lisitud de los subesquemas con los que trabajamos. Los Teoremas 2.8.5 y 2.8.6 dan una respuesta en esta dirección. En la sección 2.9 ofrecemos un estudio más amplio de este tipo de situaciones.

Teorema 2.8.5 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Sea $Z \subset W$, un subesquema casi-liso. Entonces un subesquema $V \subset Z$ es un centro permisible para $Z \longrightarrow Y$ si y sólo si es un centro permisible para $\pi : W \longrightarrow Y$. Además será de primera o segunda clase para uno de los morfismos si y sólo si lo es para el otro.*

Demostración: Sea $x \in V \subset Z \subset W$ un punto cerrado con $\pi(x) = y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Entonces V es un centro geoméricamente permisible para Z si y sólo si es un centro geoméricamente permisible para W . En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros como en 2.6.1, $\{v_1, \dots, v_d\}$ tal que:

$$\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r},$$

e

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle \subset \mathcal{O}_{W,x}.$$

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}$$

vinculados por una relación:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Puesto que $V \subset Z$ podemos suponer que

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_l \rangle, \quad l \leq t.$$

Como Z es horizontal de hecho podemos suponer que $l < s$. Dado un elemento $b \in \mathcal{O}_{W,x}$ denotaremos por \bar{b} su clase módulo $\mathcal{I}(Z)$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi|_Z)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_{l+1}, \dots, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r}, \dots, d\bar{v}_d \right\}$$

vinculados por la relación:

$$\bar{a}_{l+1}d\bar{v}_{l+1} + \dots + \bar{a}_{s-1}d\bar{v}_{s-1} + \bar{a}_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \bar{a}_r \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \bar{a}_{r+1}d\bar{v}_{r+1} + \dots + \bar{a}_d d\bar{v}_d = 0$$

Para estos cálculos ver 2.7.2. Recordemos que Z es casi-liso en x (i.e. permisible de primera clase en x). Existe por lo tanto $i \in \{l+1, \dots, d\}$ tal que $a_i \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad. Denotaremos por $\Delta_{V,x}^Z$ el jacobiano del centro V como subesquema de Z .

Por 2.7.7 (2.49) y (2.50) se tiene que :

- Si V es horizontal ($t < s$):
 - i. $\Delta_{V,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(V)_x$;
 - ii. $\Delta_{V,x}^Z = \langle \bar{a}_{t+1}, \dots, \bar{a}_d \rangle \mod \overline{\mathcal{I}(V)}_x$
- Si V es vertical ($t \geq s$):
 - i. $\Delta_{V,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(V)_x$;
 - ii. $\Delta_{V,x}^Z = \langle \bar{a}_s, \dots, \bar{a}_d \rangle \mod \overline{\mathcal{I}(V)}_x$.

Podemos concluir por tanto que

$$\Delta_V = \Delta_V^Z \subset \mathcal{O}_V$$

y como consecuencia la conclusión del Teorema se sigue de los Teoremas 2.7.8 y 2.7.9 y de la Observación 2.7.10. \square

El teorema que enunciamos a continuación no es una consecuencia inmediata del Teorema 2.8.5. Recuérdese que dado un subesquema plano $Z \subset W$, puede suceder que el morfismo

$$\pi|_Z: Z \longrightarrow Y$$

sea casi-liso aunque Z no sea un centro permisible para W (ejemplos 2.8.4 y 2.8.3).

Teorema 2.8.6 Sea $Z \subset W$ un centro horizontal permisible para $\mathcal{O}_{W,x}$, y sea $V \subset Z$ un centro permisible. Sea $W_1 \xrightarrow{e} W$ la explosión con centro V , y $Z_1 \subset W_1$ el transformado estricto de Z . Entonces $Z_1 \subset W_1$ es un subesquema casi-liso.

Demostración: Sea $x \in V \subset Z$ un punto cerrado, $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente

$$\{v_1, \dots, v_d\}$$

de modo que

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$, con v una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$;
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_l \rangle$ con $1 \leq l < s$;
- $\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ con $l \leq t \leq d$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}$$

y existe una relación que los vincula

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.72)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Con estos datos y por 2.7.7 (2.49),

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \pmod{\mathcal{I}(Z)_x}. \quad (2.73)$$

Como hemos supuesto que Z es un centro horizontal permisible existe $i \in \{l+1, \dots, d\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Consideremos la explosión con centro V :

$$e: W_1 \longrightarrow W,$$

sea $\pi_1 = \pi \circ e$ y sea Z_1 el transformado estricto de Z .

Si V es horizontal.

En este caso se tiene que que $l < t < s$. Como V es un centro permisible, necesariamente debe ser permisible de primera clase, y por lo tanto por 2.7.7 (2.49):

$$\Delta_{V,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle = \mathcal{O}_{V,x}. \quad (2.74)$$

Existe pues $i \in \{t+1, \dots, d\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Consideremos la carta:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_{l+1}}{v_t}, \dots, \frac{v_{t-1}}{v_t} \right].$$

Para $i = l+1, \dots, t-1$ definimos

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_t}.$$

Por el Lema 2.6.5, en la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$ el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_{t-1}, dv_t, \dots, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.75)$$

La relación (2.72) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 v_t d\bar{v}_1 + \dots + a_{t-1} v_t d\bar{v}_{t-1} + \\ & + (a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{t-1} \bar{v}_{t-1} + a_t) dv_t + \\ & + \dots + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Puesto que V es permisible de primera clase en x por (2.74) alguno de los coeficientes involucrados en esta última relación es una unidad.

En esta carta el transformado estricto de Z , Z_1 , viene determinado por el ideal:

$$\mathcal{I}(Z_1) = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_l \rangle.$$

Sea x_1 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal:

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t-1}, v_t, \dots, v-d \rangle.$$

Por 2.7.7 (2.49) se tiene que:

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle a_{l+1}v_l, \dots, a_{t-1}v_l, a_{l+1}\bar{v}_{l+1} + \dots + a_t, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle = \mathcal{O}_{Z_1, x_1},$$

por lo que Z_1 es un centro permisible de primera clase en x_1 .

Si $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$ un punto cerrado entonces podemos argumentar como en 2.4.5 para concluir que Z_1 es permisible en y .

Si V es vertical.

En este caso se tiene que que $s \leq t \leq r$. Por 2.7.7 (2.49):

$$\Delta_{V, x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle = \mathcal{O}_{V, x}. \quad (2.77)$$

Consideremos la carta:

$$\mathcal{O}_{W, x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W, x} \left[\frac{v_1}{v_t}, \dots, \frac{v_{t-1}}{v_t} \right].$$

Para $i \in \{1, \dots, t\}$ sea

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_t}.$$

Por el Lema 2.6.6 en la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$ el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_{t-1}}{\bar{v}_{t-1}}, \frac{dv_t}{v_t}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.78)$$

La relación (2.72) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 v_t d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} v_t d\bar{v}_{s-1} + a_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + a_{t-1} \frac{d\bar{v}_{t-1}}{\bar{v}_{t-1}} + \\ & (a_1 \bar{v}_1 v_t + \dots + a_{s-1} \bar{v}_{s-1} v_t + a_s + \dots + a_{t-1} + a_t) \frac{dv_t}{v_t} + \\ & a_{t+1} \frac{dv_{t+1}}{v_{t+1}} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

En esta carta el transformado estricto de Z , Z_1 viene determinado por el ideal:

$$\mathcal{I}(Z_1) = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_t \rangle.$$

Ahora distinguiremos según V sea un centro permisible de primera o segunda clase en x :

- Si V es un centro permisible de primera clase en x entonces por la Observación 2.7.10 y por (2.77), existe $i \in \{s, \dots, d\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Sea x_2 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal:

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t-1}, v_t, \dots, v_d \rangle.$$

Por 2.7.7 (2.49),

$$\Delta_{Z_1, x_2} = \langle a_{l+1}v_t, \dots, a_{s-1}v_t, a_s, \dots, a_d \rangle \pmod{\mathcal{I}(Z_1)_{x_2}}. \quad (2.80)$$

y por lo tanto

$$\Delta_{Z_1, x_2} = \mathcal{O}_{Z_1, y},$$

por lo que Z_1 es permisible en x_2 . Un argumento como el desarrollado en 2.4.5 nos permite concluir que Z_1 es permisible en todo punto cerrado $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

- Si V es un centro permisible de segunda clase en x entonces por la observación 2.7.10,

$$\Delta_{V,x} = 0 \subset \mathcal{O}_{V,x}. \quad (2.81)$$

Puesto que Z es un centro permisible de primera clase en x , por (2.73), (2.77) y (2.81), existe $i \in \{l+1, \dots, s-1\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Por (2.81) en la relación (2.79) podemos extraer factor común a v_t y obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1 d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} d\bar{v}_{s-1} + \left(\frac{a_s}{v_t}\right) \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \left(\frac{a_{t-1}}{v_t}\right) \frac{d\bar{v}_{t-1}}{\bar{v}_{t-1}} + \\ \left(a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} \bar{v}_{s-1} + \frac{a_s}{v_t} + \dots + \frac{a_{t-1}}{v_t} + \frac{a_t}{v_t}\right) \frac{dv_t}{v_t} \\ \left(\frac{a_{l+1}}{v_t}\right) \frac{dv_{l+1}}{v_{l+1}} + \dots + \left(\frac{a_r}{v_t}\right) \frac{dv_r}{v_r} + \\ \left(\frac{a_{r+1}}{v_t}\right) dv_{r+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_t}\right) dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Como en el caso anterior, consideremos el punto cerrado $x_2 \in Z_1$. Por 2.7.7 (2.49) se tiene que:

$$\Delta_{Z_1, x_2} = \langle a_{l+1}, \dots, a_{s-1}, \frac{a_s}{v_t}, \dots, \frac{a_d}{v_t} \rangle = \mathcal{O}_{Z_1, x_2},$$

por lo que Z_1 es permisible de primera clase en x_2 . Por 2.4.5 podemos concluir que Z_1 es permisible en todo punto cerrado $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

Supongamos ahora que $l+1 < s$. Consideremos la carta afín

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_{l+1}}, \dots, \frac{v_l}{v_{l+1}}, \frac{v_{l+2}}{v_{l+1}}, \dots, \frac{v_t}{v_{l+1}} \right].$$

Para $i \in \{1, \dots, t\}$ $i \neq l+1$ sea

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_{l+1}}.$$

Por el Lema 2.6.5, a lo largo de esta carta el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_l, \frac{dv_{l+1}}{v_{l+1}}, \dots, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.83)$$

La relación (2.72) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 v_{l+1} d\bar{v}_1 + \dots + a_l v_{l+1} d\bar{v}_l + \\ & + (a_1 \bar{v}_1 v_{l+1} + \dots + a_{l+1} v_{l+1} + \dots + a_s + \dots + a_t) \frac{dv_{l+1}}{v_{l+1}} + \\ & + \dots + a_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + a_t \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} \\ & + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

En esta carta el transformado estricto de Z_1 viene determinado por el ideal

$$\mathcal{I}(Z_1) = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_l \rangle.$$

Distinguiremos de nuevo según V sea un centro de primera o segunda clase en x :

- Si V es un centro de primera clase en x entonces por (2.77) existe $i \in \{s, \dots, d\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Sea x_3 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal:

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_l, v_{l+1}, \dots, v_{s-1}, \bar{v}_s, \dots, \bar{v}_t, v_{t+1}, \dots, v-d \rangle.$$

Entonces por 2.7.7 (2.49),

$$\Delta_{Z_1, x_3} = \langle a_{l+1}v_{l+1}, \dots, a_{s-1}v_{l+1}, a_s, \dots, a_d \rangle = \mathcal{O}_{Z_1, x_3}.$$

Concluimos por tanto que Z_1 es un centro permisible de primera clase en x_3 . Sea $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$ un punto cerrado. Podemos concluir que Z_1 es permisible en z utilizando un argumento similar al presentado en 2.4.5

- Si V es un centro permisible de segunda clase en x entonces,

$$\Delta_{V, x} = 0 \subset \mathcal{O}_{V, x}, \quad (2.85)$$

y por (2.77) podemos extraer factor común v_{l+1} en la relación (2.84). De este modo,

$$\begin{aligned} & a_1 d\bar{v}_1 + \dots + a_l d\bar{v}_l + \\ & + \left(a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{l+1} + \dots + \frac{a_s}{v_{l+1}} + \dots + \frac{a_t}{v_{l+1}} \right) \frac{dv_{l+1}}{v_{l+1}} + \\ & + \dots + \left(\frac{a_s}{v_{l+1}} \right) \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \left(\frac{a_t}{v_{l+1}} \right) \frac{d\bar{v}_t}{\bar{v}_t} + \dots + \left(\frac{a_r}{v_{l+1}} \right) \frac{dv_r}{v_r} \\ & \quad \left(+ \frac{a_{r+1}}{v_{l+1}} \right) dv_{r+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_{l+1}} \right) dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Como por hipótesis Z es permisible de primera clase en x , por (2.73), (2.77) y 2.85 existe $i \in \{l+1, \dots, s-1\}$ tal que a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W, x}$. Por 2.7.7 (2.49) se tiene que:

$$\Delta_{Z_1, x_3} = \langle a_{l+1}, \dots, a_{s-1}, \frac{a_s}{v_{l+1}}, \dots, \frac{a_d}{v_d} \rangle = \mathcal{O}_{Z_1, x_3},$$

de donde deducimos que Z_1 es un centro permisible de primera clase en x_3 . Para el resot de los puntos cerrados $y \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$ argumentamos cmo en los casos anteriores.

Podemos cubrir Z_1 con cartas como las que hemos descrito, por lo tanto se puede concluir que Z_1 es un centro permisible de primera clase en todos sus puntos cerrados. \square

2.9 Inclusión de centros permisibles y estabilidad por explosiones.

Consideremos un morfismo casi-liso

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

y $Z, V \subset W$, con $V \cap Z \neq \emptyset$, dos centros permisibles. Nos preguntamos si tras la explosión con centro, por ejemplo V , el transformado estricto de Z seguirá siendo permisible.

En la sección 2.8, hemos ofrecido ya una respuesta a esta cuestión en el caso de que $V \subset Z$ y si Z es un centro horizontal en el Teorema 2.8.6. Ahora completaremos el contenido de este teorema.

Teorema 2.9.1 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sean $V \subset Z \subset W$ centros (verticales) permisibles para W . Consideremos*

$$W_1 \longrightarrow W$$

la explosión de W con centro V , y sea Z_1 el transformado estricto de Z . Entonces Z_1 es permisible para W_1 .

Demostración: Sea $x \in V \subset Z$ un punto cerrado, con $\pi(x) = y \in Y$, y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Consideremos un sistema regular de parámetros conveniente en $\mathcal{O}_{W,x}$,

$$\{v_1, \dots, v_d\} \quad (2.87)$$

de modo que:

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$, donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad;
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$, con $s \leq t \leq r$ (puesto que Z es vertical);
- $\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t, v_{j_1}, \dots, v_{j_n} \rangle$, donde $j_i \in \{t+1, \dots, d\}$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.88)$$

vinculados por una relación

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.89)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Con esta notación y por 2.7.7 (2.50) se tiene que:

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.90)$$

Tras la explosión con centro V denotaremos por Z_1 al transformado estricto de Z .

Si Z es un centro permisible de segunda clase.

Si Z es un centro permisible de segunda clase entonces por la Observación 2.7.10,

$$\Delta_Z = 0 \subset \mathcal{O}_Z.$$

Como consecuencia existe un abierto no vacío, $U \subset Z_1$, tal que para todo punto cerrado $z \in U$

$$\Delta_{Z_1,z} = 0.$$

Puesto que Z_1 es irreducible, necesariamente

$$\Delta_{Z_1} = 0 \subset \mathcal{O}_{Z_1}.$$

Por otro lado, como Z_1 es geoméricamente permisible, el Teroema 2.7.9 nos garantiza que Z_1 es un centro permisible de segunda clase para W_1 en todos sus puntos cerrados.

Si Z es un centro permisible de primera clase.

Ordenando adecuadamente los elementos que aparecen en (2.87) podemos suponer que, o bien:

- **Caso A:**

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_t, \dots, v_k, v_{r+1}, \dots, v_l \rangle \quad (2.91)$$

con $t \leq k \leq r$, y $r+1 \leq l \leq d$, y entonces por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{V,x} = \langle a_s, \dots, a_r, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(V)_x, \quad (2.92)$$

o bien

• **Caso B:**

$$\mathcal{I}(V)_x = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad (2.93)$$

con $t < k \leq r$. y entonces por 2.7.7 (2.50)

$$\Delta_{V,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(V)_x. \quad (2.94)$$

Sea

$$e : W_1 \longrightarrow W,$$

la explosión con centro V , y sea $\pi_1 = \pi \circ e$.

• Consideremos la carta afín (sólo en el caso A):

$$\mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_l}, \dots, \frac{v_k}{v_l}, \frac{v_{r+1}}{v_l}, \dots, \frac{v_{l-1}}{v_l} \right]$$

Para $i \in \{1, \dots, t, \dots, k, r+1, \dots, l-1\}$, sea

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_l}.$$

Por el Lema 2.6.6, en esta carta afín el módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_k}{\bar{v}_k}, \frac{dv_{k+1}}{v_{k+1}}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, d\bar{v}_{r+1}, \dots, d\bar{v}_{l-1}, \frac{dv_l}{v_l}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.95)$$

La relación (2.89) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 v_l d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} v_l d\bar{v}_{s-1} + a_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + a_k \frac{d\bar{v}_k}{v_k} + \\ & + a_{k+1} \frac{dv_{k+1}}{v_{k+1}} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} v_l d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{l-1} v_l d\bar{v}_{l-1} + \\ & \quad (a_1 \bar{v}_1 v_l + \dots + a_{s-1} \bar{v}_{s-1} v_l + \\ & \quad + a_s \dots + a_k + a_{r+1} \bar{v}_{r+1} v_l + \dots + a_l v_l) \frac{dv_l}{v_l} + \\ & \quad + a_{l+1} dv_{l+1} + \dots + a_d dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Ahora distinguiremos según V sean un centro permisible de primera o segunda clase. Recordemos que

$$\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}.$$

- Si V es un centro permisible de primera clase entonces

$$\Delta_{V,x} = \mathcal{O}_{V,x}.$$

Por (2.92) existe $i \in \{s, \dots, r\} \cup \{l+1, \dots, d\}$, tal que en la relación (2.89) $a_i \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad.

Sea x_1 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, v_{k+1}, \dots, v_r, \bar{v}_{r+1}, \dots, \bar{v}_{l-1}v_l, \dots, v_d \rangle.$$

Por 2.7.7 (2.50), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{Z_1, x_1} &= \langle a_s, \dots, a_r, a_{r+1}v_l, \dots, a_{l-1}v_l, a_lv_l, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1} = \\ &= \mathcal{O}_{Z_1, x_1}, \end{aligned}$$

por lo que Z_1 es un centro permisible de primera clase en x_1 . Un razonamiento similar al expuesto en 2.4.5 nos permite concluir que de hecho Z_1 es permisible en todo punto cerrados $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

- Si V es un centro permisible de segunda clase, entonces por 2.7.10:

$$\Delta_V = 0 \subset \mathcal{O}_V.$$

Como

$$\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x},$$

por (2.90) y (2.94) para $i \in \{s, \dots, r, l+1, \dots, d\}$ los coeficientes a_i de la relación 2.89 se anulan a lo largo de V , y existe $j \in \{r+1, \dots, l\}$, tal que a_j es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

En este caso, la relación (2.96) se puede escribir como

$$v_l \left[a_1 d\bar{v}_1 + \dots + \frac{a_s}{v_l} \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \frac{a_k}{v_l} \frac{d\bar{v}_k}{\bar{v}_k} + \dots + \frac{a_r}{v_l} \frac{dv_r}{v_r} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& a_{r+1}d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{l-1}d\bar{v}_{l-1} \\
& \left(a_1\bar{v}_1 + \dots + \frac{a_s}{v_l} + \dots + \frac{a_k}{v_l} + \right. \\
& \left. + a_{r+1}\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{l-1}\bar{v}_{l-1} + a_l \right) \frac{dv_l}{v_l} + \\
& \left(\frac{a_{l+1}}{v_{l+1}} \right) dv_{l+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_l} \right) dv_d \Big] = 0. \quad (2.97)
\end{aligned}$$

por lo que para $\omega(\pi_1)$ a lo largo de la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$ se obtiene la relación:

$$\begin{aligned}
& a_1d\bar{v}_1 + \dots + \left(\frac{a_s}{v_l} \right) \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \left(\frac{a_k}{v_l} \right) \frac{d\bar{v}_k}{\bar{v}_k} + \dots + \left(\frac{a_{l-1}}{v_l} \right) d\bar{v}_{l-1} \\
& + \frac{a_r}{v_l} \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1}d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{l-1}d\bar{v}_{l-1} \\
& \left(a_1\bar{v}_1 + \dots + \frac{a_s}{v_l} + \dots + \frac{a_k}{v_l} + \right. \\
& \left. + a_{r+1}\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{l-1}\bar{v}_{l-1} + a_l \right) \frac{dv_l}{v_l} + \\
& \left(\frac{a_{l+1}}{v_l} \right) dv_{l+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_l} \right) dv_d = 0 \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Sea x_1 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal:

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, v_{k+1}, \dots, v_r, \bar{v}_{r+1}, \dots, \bar{v}_{l-1}v_l, \dots, v_d \rangle.$$

Por 2.7.7 (2.50)

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle \frac{a_s}{v_l}, \dots, \frac{a_r}{v_l}, a_{r+1}, \dots, a_l, \frac{a_{l+1}}{v_l}, \dots, \frac{a_d}{v_l} \rangle \bmod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1} = \mathcal{O}_{Z_1, y},$$

y en consecuencia se tiene que Z_1 es un centro permisible de primera clase en x_1 . Razonando de manera similar a como se hizo en 2.4.5 se puede concluir que Z_1 es permisible en todo punto cerrado $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

- Si $k > t$ y suponiendo que nos encontramos en el caso (2.91), consideremos la carta:

$$\mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_k}, \dots, \frac{v_{k-1}}{v_k}, \frac{v_{r+1}}{v_k}, \dots, \frac{v_l}{v_k} \right].$$

El caso (2.93) es similar, y no lo desarrollaremos explícitamente. Para $i = \{1, \dots, k-1, r+1, \dots, l\}$, sea

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_k}.$$

Por el Lema 2.6.6, en esta carta afín, el módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi_1)$, está generado por los elementos,

$$\left\{ d\bar{v}_1, \dots, d\bar{v}_{s-1}, \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s}, \dots, \frac{d\bar{v}_{k-1}}{\bar{v}_{k-1}}, \frac{dv_k}{v_k}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, \right. \\ \left. d\bar{v}_{r+1}, \dots, d\bar{v}_l, dv_{l+1}, \dots, dv_d \right\}. \quad (2.99)$$

La relación (2.89) da lugar a la relación:

$$a_1 v_k d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} v_k d\bar{v}_{s-1} + a_s \frac{d\bar{v}_s}{\bar{v}_s} + \dots + \\ (a_1 \bar{v}_1 v_k + \dots + a_s + \dots + a_k + a_{r+1} \bar{v}_{r+1} v_k + \dots + a_l \bar{v}_l v_k) \frac{dv_k}{v_k} + \\ a_{k+1} dv_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} v_k d\bar{v}_{r+1} + \\ + \dots + a_l v_k d\bar{v}_l + a_{l+1} dv_{l+1} + \dots + a_d dv_d = 0. \quad (2.100)$$

Distinguiremos ahora según V sea un centro de primera o segunda clase en x :

- Si V es un centro permisible de primera clase entonces por la Observación 2.7.10

$$\Delta_{V,x} = \mathcal{O}_{V,x}.$$

Por (2.92) existe $i \in \{s, \dots, r, l+1, \dots, d\}$, tal que a_i es una unidad en la relación (2.100).

El transformado estricto de Z , Z_1 viene determinado por:

$$\mathcal{I}(Z_1) = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i \rangle.$$

Sea x_1 el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}, v_k, \dots, v_r, \bar{v}_{r+1}, \dots, \bar{v}_l, v_{l+1}, \dots, v_d \rangle,$$

en el caso A, o

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}, v_k, \dots, v_r, \dots, v_d \rangle,$$

en el caso B. Por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle a_s, \dots, a_r, a_{r+1}v_k, \dots, a_lv_k, a_{l+1}, \dots, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1} = \mathcal{O}_{Z_1, x_1},$$

por lo que Z_1 es permisible de primera clase en x_1 . Una vez más recurrimos a 2.4.5 para concluir que Z_1 es permisible en todo punto cerrado $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

- Por otro lado, si V es un centro permisible de segunda clase en x , entonces por la observación 2.7.10,

$$\Delta_{V, x} = 0.$$

Por (2.92) podemos extraer factor común v_k en la relación (2.100):

$$\begin{aligned} & a_1 d\bar{v}_1 + \dots + a_{s-1} d\bar{v}_{s-1} + \left(\frac{a_s}{v_k} \right) \frac{d\bar{v}_s}{v_s} + \dots + \\ & (a_1 \bar{v}_1 + \dots + \frac{a_s}{v_k} + \dots + \frac{a_k}{v_k} + \frac{a_{r+1}}{v_k} \bar{v}_{r+1} + \dots + a_l \bar{v}_l) \frac{dv_k}{v_k} + \\ & \frac{a_{k+1}}{v_k} dv_{k+1} v_{k+1} + \dots + \frac{a_r}{v_k} \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} d\bar{v}_{r+1} + \\ & \dots + a_l d\bar{v}_l + \left(\frac{a_{l+1}}{v_k} \right) dv_{l+1} + \dots + \left(\frac{a_d}{v_k} \right) dv_d = 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Puesto que Z es un centro permisible de primera clase en x , por (2.90) existe $i \in \{r+1, \dots, l\}$ tal que a_i es una unidad en la relación (2.101). Sea x_1 como en el apartado anterior. Por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle \frac{a_s}{v_k}, \dots, \frac{a_r}{v_k}, a_{r+1}v_k, \dots, a_l, \frac{a_{l+1}}{v_k}, \dots, \frac{a_d}{v_k} \rangle \bmod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1} = \mathcal{O}_{Z_1, x_1},$$

y por tanto, Z_1 es un centro de primera clase en x_1 . Con razonamiento como en 2.4.5 deducimos que Z_1 es permisible en todo punto cerrado $z \in Z_1 \cap \text{Spec}(\mathcal{B}) \cap e^{-1}(V)$.

La demostración del Teorema se concluye así puesto que podemos cubrir Z_1 con cartas afines como las que hemos descrito. \square

Observación 2.9.2 Si $V, Z \subset W$ son dos centros permisibles, con cruza-
mientos normales, pero V no está incluido en Z , entonces no tiene por qué
verificarse la conclusión de la Teorema 2.9.1, ya sea Z un centro permisible
horizontal o vertical. Como muestra, exhibimos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9.3 Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo y consideremos el anillo

$$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3] / \langle p - v_1^p(1 + v_2 + v_3) \rangle),$$

sobre \mathbb{Z} . Sean $W = \text{Spec}(\mathcal{A})$ e $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, junto con el morfismo natural

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

W es un esquema íntegro y regular y el morfismo π es plano, separado y de
tipo finito. Nótese que este morfismo es liso sobre cualquier punto cerrado
de Y distinto de $y = V(\langle p \rangle)$.

Una vez más hacemos notar que, para evitar que la notación sea excesi-
vamente complicada, dado un elemento $a \in \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]$ denotaremos por a
también a su clase en el anillo \mathcal{A} .

Sea x el punto cerrado correspondiente al ideal maximal $\langle v_1, v_2, v_3, p \rangle$.
El $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, dv_3 \right\}, \quad (2.102)$$

y podemos encontrar una relación que los vincule utilizando que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dp}{p} = \frac{d(v_1^p(1 + v_2 + v_3))}{(v_1^p(1 + v_2 + v_3))} = \\ &= pv_1^p(1 + v_2 + v_3) \frac{dv_1}{v_1} + v_1^p dv_2 + v_1^p dv_3 = \\ &= v_1^p \left(p(1 + v_2 + v_3) \frac{dv_1}{v_1} + dv_2 + dv_3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que se tiene la relación:

$$p(1 + v_2 + v_3) \frac{dv_1}{v_1} + dv_2 + dv_3 = 0 \quad (2.103)$$

y por tanto, $\omega(\pi)_x$ es libre de rango 2 en x . Argumentando como en 2.4.5
concluimos que $\omega(\pi)$ es libre de rango 2 en cualquier punto cerrado de la

fibra del morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ sobre y . En consecuencia podemos concluir que $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso.

Consideremos las curvas

$$\mathcal{C}_1 = V(< v_1, v_2 >), \text{ y } \mathcal{C}_2 = V(< v_1, v_3 >),$$

y la superficie

$$\mathcal{S} = V(< v_3 >).$$

Obsérvese que \mathcal{C}_2 es una curva vertical y que \mathcal{S} es una superficie horizontal. Por 2.7.7 (2.49) y (2.50) se tiene que

$$\Delta_{\mathcal{C}_1, x} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1, x}, \quad \Delta_{\mathcal{C}_2, x} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}_2, x}, \text{ y } \Delta_{\mathcal{S}} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}_x}$$

por lo que tanto las dos curvas, como la superficie son centros permisibles en x para el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$.

Consideremos la explosión con centro la curva \mathcal{C}_1 :

$$e : W_1 \longrightarrow W,$$

sea $\pi_1 = \pi \circ e$, y la carta afín

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \left[\frac{v_1}{v_2} \right].$$

Sea $\bar{v}_1 = \frac{v_1}{v_2}$. En esta carta, el módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi_1)$, está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\},$$

(Lema 2.6.5), y la relación que los vincula se obtiene a partir de la relación (2.103):

$$\begin{aligned} 0 &= p(1 + v_2 + v_3) \left(\frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + \frac{dv_2}{v_2} \right) + dv_2 + dv_3 = \\ &= p(1 + v_2 + v_3) \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + [p(1 + v_2 + v_3) + v_2] \frac{dv_2}{v_2} + dv_3 = 0 \end{aligned}$$

Sea ahora $x_1 = V(< \bar{v}_1, v_2, v_3 >)$, y $(\mathcal{C}_2)_1$ y $(\mathcal{S})_1$ los transformados estrictos de \mathcal{C}_2 y \mathcal{S} , respectivamente. Como

$$\mathcal{I}((\mathcal{C}_2)_1) = < \bar{v}_1, v_3 >, \text{ y } \mathcal{I}((\mathcal{S})_1) = < v_3 >$$

usando los resultados de 2.7.7 (2.49) y (2.50) se obtiene que

$$\Delta_{(\mathcal{C}_2)_1, x_1} = \langle p, v_2 \rangle \bmod \langle \bar{v}_1, v_3 \rangle \neq \mathcal{O}_{(\mathcal{C}_2)_1, x_1},$$

y

$$\Delta_{(\mathcal{S})_1, x_1} = \langle p, v_2 \rangle \bmod \langle v_3 \rangle \neq \mathcal{O}_{\mathcal{S}_1, x_1}$$

por lo que, ni la curva $(\mathcal{C}_2)_1$, ni la superficie $(\mathcal{S})_1$, son centros permisibles en x_1 , para el morfismo $\pi_1 : W_1 \rightarrow Y$.

Si en un caso como éste, tuviéramos la necesidad de explotar en la curva \mathcal{C}_1 , pero por algún motivo no quisiéramos perder la permisibilidad de \mathcal{C}_2 , lo mejor es comenzar explotando en el punto x , con lo que *separaremos* los transformados estrictos de ambas curvas, y luego podemos explotar en ellas si es necesario.

La patología descrita en la Observación 2.9.2, no se produce, sin embargo, si exigimos que V sea un centro combinatorio. Este es el resultado de la siguiente proposición:

Proposición 2.9.4 *Sean $W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, $Z \subset W$ un centro permisible y V un centro combinatorio. Consideremos la explosión con centro V :*

$$W_1 \rightarrow W,$$

y sea Z_1 el transformado estricto de Z . Entonces Z_1 es permisible para W_1 .

Demostración: Si $V \cap Z = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea por tanto $x \in V \cap Z$ un punto cerrado, con $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y, y}$. Sea $\{v_1, \dots, v_d\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W, x}$, tal que

- $\tau = v \cdot v_s^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}$;
- $\mathcal{I}(V)_x = \langle v_l, \dots, v_k \rangle$, con $s \leq l \leq k \leq r$;
- $\mathcal{I}(Z)_x = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$, con $1 \leq t \leq r$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\}, \quad (2.104)$$

vinculados por una relación:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d dv_d = 0 \quad (2.105)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Si $V \subset Z$ la proposición ya está probada (Teoremas 2.8.6 y 2.9.1). Consideremos por lo tanto el caso en que V no está contenido en Z . Por lo tanto supondremos que $t < k$.

- Si Z es horizontal, entonces $t < s$ y por 2.7.7 (2.49) se tiene que

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.106)$$

- Si Z es vertical, entonces $s \leq t < r$ y por 2.7.7 (2.50) deducimos que:

$$\Delta_{Z,x} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z)_x. \quad (2.107)$$

Puesto que, por hipótesis, Z es un centro permisible, o bien $\Delta_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$ o bien $\Delta_{Z,x} = 0 \mod \mathcal{I}(Z)_x$, (Observación 2.7.10).

Sea ahora

$$W_1 \longrightarrow W$$

la explosión con centro V .

Consideremos la carta

$$\mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_l}{v_k}, \dots, \frac{v_{k-1}}{v_k} \right],$$

y para $i = \{l, \dots, k-1\}$, sea $\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_k}$.

En esta carta, por el Lema 2.6.6, el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$, está generado por los elementos:

$$\left\{ dv_1, \dots, dv_{s-1}, \frac{dv_s}{v_s}, \dots, \frac{dv_{l-1}}{v_{l-1}}, \frac{d\bar{v}_l}{\bar{v}_l}, \dots, \frac{d\bar{v}_{k-1}}{\bar{v}_{k-1}}, \frac{dv_k}{v_k}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.108)$$

y la relación que los vincula, se obtiene directamente a partir de la relación (2.105), ésto es:

$$a_1 dv_1 + \dots + a_{s-1} dv_{s-1} + a_s \frac{dv_s}{v_s} + \dots + a_l \frac{d\bar{v}_l}{\bar{v}_l} + \dots + (a_l + \dots + a_k) \frac{dv_k}{v_k} + \dots + a_d dv_d = 0. \quad (2.109)$$

En esta carta, el transformado estricto de Z , Z_1 , viene dado por las ecuaciones:

- $\mathcal{I}(Z_1) = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ si Z es horizontal, o si Z es vertical y $t < l$;
- $\mathcal{I}(Z_1) = \langle v_1, \dots, v_{l-1}, \bar{v}_l, \dots, \bar{v}_t \rangle$, si Z es vertical y $l \leq t$.

Obsérvese que Z_1 es un centro geoméricamente permisible para W_1 . Si Z es un centro permisible de segunda clase entonces Δ_{Z_1} es un ideal nulo en un abierto no vacío de Z_1 . Como Z_1 es irreducible se tiene que

$$\Delta_{Z_1} = 0$$

de donde deducimos que Z_1 es un centro permisible de segunda clase para W_1 .

Supongamos ahora que Z es un centro permisible de primera clase. Consideremos el punto cerrado x_1 correspondiente al ideal maximal

$$\langle v_1, \dots, v_{l-1}, \bar{v}_l, \dots, \bar{v}_{k-1}, v_k, \dots, v_d \rangle.$$

- Si Z es horizontal, entonces Z_1 es horizontal y por 2.7.7 (2.49) se tiene que

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle a_{t+1}, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1},$$

y por tanto Z_1 es permisible de primera clase en x_1 .

- Si Z es vertical, entonces Z_1 es vertical y por 2.7.7 (2.50) se tiene que

$$\Delta_{Z_1, x_1} = \langle a_s, \dots, a_d \rangle \mod \mathcal{I}(Z_1)_{x_1},$$

y por tanto Z_1 es permisible de primera clase en x_1 .

Razonando como en 2.4.5 en cualquiera de los dos casos se puede concluir que Z_1 es permisible en todo punto cerrado

$$z \in Z_1 \cap e^{-1}(V) \cap \text{Spec}(\mathcal{B}).$$

La demostración de la proposición se concluye ahora del hecho de que Z_1 se cubre con cartas como las que hemos descrito. \square

2.10 Permisibilidad para curvas verticales.

Dedicamos esta última sección del capítulo al estudio de la permisibilidad de curvas verticales.

Los resultados de esta sección se utilizarán en los dos próximos capítulos. En el Capítulo 4 nos veremos obligados a explotar en curvas verticales en la recta final de la demostración del Teorema 4.1.3. Veremos también, en el Capítulo 3, que este tipo de curvas nos permitirán introducir los invariantes necesarios en nuestra demostración del Teorema 3.1.2.

2.10.1 Sea W un esquema de dimensión d , $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y T un subesquema reducido e irreducible de dimensión 1.

Si T es horizontal sobre Y , entonces en [V3, Proposition 4.5] se prueba que existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{T_i})$, (T_i denota el transformado estricto de T_{i-1}) tal que

$$\Delta_{T_r} = \mathcal{O}_{T_r}.$$

Incluimos ahora un resultado análogo para curvas verticales:

Proposición 2.10.2 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $T \subset W$ un subesquema irreducible y reducido de dimensión 1, vertical sobre Y . Entonces existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{T_i})$, (T_i denota el transformado estricto de T_{i-1}), de modo tal que T_N es un centro permisible para W_N .

En la demostración de esta proposición distinguiremos dos etapas:

- En la primera etapa probaremos que tras una secuencia finita de explosiones en puntos cerrados, podemos suponer que T es geoméricamente permisible (i.e. que tiene cruzamientos normales, simultáneamente, con todas las componentes de las fibras del morfismo) ((2.10.3) y Lema 2.10.7).

- En la segunda etapa, probaremos la Proposición 2.10.2 suponiendo que T es un centro geoméricamente permisible (2.10.8).

2.10.3 Transversalidad y permisibilidad geométrica.

Sea W un esquema de dimensión d , $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $T \subset W$ una curva regular. Para cada punto cerrado $y \in Y$ consideremos la fibra del morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ sobre el punto y :

$$E_y = \{H_1, \dots, H_{n_y}\}$$

donde $\{H_1, \dots, H_{n_y}\}$ es un conjunto de hipersuperficies regulares con cruza-mientos normales.

Sea $x \in H_i \cap T$ un punto cerrado. En $\mathcal{O}_{W,x}$ fijamos un sistema regular de parámetros:

$$\{v_1, \dots, v_d\},$$

de modo que

- $\mathcal{I}(H_i)_x = \langle v_i \rangle$,
- $\mathcal{I}(T)_x = \langle (f_1)_x, \dots, (f_{d-1})_x \rangle$.

Sea $k_W(x) = \mathcal{O}_{W,x}/m(x)$, y para $r \in m(x)$ sea \bar{r} su clase en $m(x)/m(x)^2$.

Observación 2.10.4 Como T es regular en el punto x se tiene que

$$\dim_{k_W(x)} \left(\langle (\bar{f}_1)_x, \dots, (\bar{f}_{d-1})_x \rangle \right) = d - 1,$$

Observación 2.10.5 Para $i = 1, \dots, n_{\pi(x)}$ si $x \in H_i$ se tiene que:

$$d - 1 \leq \dim_{k_W(x)} \left(\langle \bar{v}_i, (\bar{f}_{r+1})_x, \dots, (\bar{f}_{d-1})_x \rangle \right) \leq d. \quad (2.110)$$

Definición 2.10.6 Diremos que T es transversal al morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ en un punto cerrado $x \in T$ si para toda hipersuperficie $H \in E_{\pi(x)}$ con $x \in H$ y $T \not\subset H$ se tiene que:

$$\left(\dim_{k_W(x)} \langle \bar{v}, (\bar{f}_1)_x, \dots, (\bar{f}_{d-1})_x \rangle \right) = d, \quad (2.111)$$

donde $\mathcal{I}(H)_x = \langle v \rangle$. Diremos que T es transversal al morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ si es transversal al morfismo en todos sus puntos cerrados.

Retomaremos la definición de transversalidad en el Capítulo 3 para el caso de superficies regulares (Definición 3.2.3), y ampliaremos este concepto en el Capítulo 4 incluyendo el caso de superficies que no son regulares (Definición 4.1.2).

Lema 2.10.7 *Sea W un esquema regular de dimensión d , y $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Sea $T \in W$ un subesquema vertical irreducible y reducido de dimensión 1. Entonces existe una secuencia finita de explosiones en puntos cerrados:*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

de modo que T_N es un centro geoméricamente permisible para W_N .

Demostración: Tras una secuencia finita de explosiones en puntos cerrados podemos suponer que T es una curva regular.

Dado que T es una curva vertical e irreducible, la imagen por el morfismo π de T , es un punto cerrado $y \in Y$, i.e. $\pi(T) = y \in Y$. Denotaremos por τ a un generador local del ideal maximal correspondiente al punto y .

Como el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, existen un número finito de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales, H_1, \dots, H_n de modo que

$$E_y = \pi^{-1}(y) = \{H_1, \dots, H_{n(y)}\}. \quad (2.112)$$

Ordenando de manera adecuada los elementos de E_y en (2.112), podemos suponer que para $i = 1, \dots, l$

$$T \subset H_i$$

y para $l + 1 \leq i \leq n(y)$:

$$T \not\subset H_i,$$

donde $1 \leq l \leq n(y)$. Con esta notación definimos

$$E(T) = \{H_1, \dots, H_l\}. \quad (2.113)$$

y

$$E(x) = \{H_i \in E_y : x \in H_i\}. \quad (2.114)$$

Nótese que como T es una curva vertical $E(T) \neq \emptyset$.

Para probar el lema probaremos en primer lugar que existe una secuencia finita de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in T_i$ (T_i denota el transformado estricto de T_{i-1}) tal que T_N es transversal al morfismo $W_N \longrightarrow Y$.

Sea $x \in T$ un punto cerrado en el que T no sea transversal al morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$. Ordenando los elementos de E_y de manera adecuada en (2.112), podemos suponer que

$$E(x) = \{H_i \in E_y : x \in H_i\} = \{H_1, \dots, H_l, \dots, H_s\}, \quad (2.115)$$

con $l \leq s \leq n(y)$. Obsérvese que si $E(T) = E(x)$ entonces T es transversal al morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ en el punto x . Luego para el caso que nos ocupa supondremos que $E(T) \neq E(x)$, (i.e. $s \geq l + 1$ en (2.115)). Bajo estas condiciones probaremos que existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in T_i$ (T_i denota el transformado estricto de T_{i-1}) de modo que para $j = \{l + 1, \dots, s\}$:

$$T_N \cap (H_j)_N = \emptyset$$

donde $(H_j)_i$ denota el transformado estricto de $(H_j)_{i-1}$ y $(H_j)_0 = H_j$.

Nótese que:

- i. La transversalidad se conserva por explosiones en centros permisibles.
- ii. Tras la explosión con centro un punto cerrado, el transformado estricto de T es transversal al divisor excepcional (Observación 2.10.4).

Como sólo hay un número finito de hipersuperficies en $E(x) - E(T)$, por (i) y (ii) nos basta probar el resultado anteriormente mencionado cuando sólo hay una.

Sea $H \in E(x) - E(T)$. Nos proponemos describir el contacto entre la curva T y la hipersuperficie H . Para ello construiremos un exponente idealístico adecuado. Sea

$$\mathcal{J} = \mathcal{I}(T \cap H) \subset \mathcal{O}_T.$$

Separar mediante explosiones en puntos el transformado estricto de T del transformado estricto de H es equivalente a resolver el exponente idealístico $(\mathcal{J}, 1)$.

Probaremos que existe una resolución de este exponente idealístico utilizando un razonamiento inductivo.

Sea $x \in T \cap H$, un punto cerrado, y sea t un parámetro local en $\mathcal{O}_{T,x}$ de modo que

$$\mathcal{J}_x = \langle t^m \rangle,$$

para algún número natural $m \geq 1$.

Consideremos la explosión con centro el punto x :

$$e: W_1 \longrightarrow W.$$

Sean T_1 y H_1 a los transformados estrictos de T y H , respectivamente, sea $(\mathcal{J}_1, 1)$ el exponente idealístico correspondiente a T_1 y H_1 , y sea E_1 el divisor excepcional.

Consideremos el punto cerrado $x_1 = T_1 \cap E_1$. Entonces se tiene que

$$(\mathcal{J}_1)_{x_1} = \langle t^{m-1} \rangle.$$

Si $m - 1 = 0$ entonces $x_1 \notin T_1 \cap H_1$. Si $m - 1 > 0$ la transversalidad se obtiene aplicando un argumento inductivo.

Por tanto, podemos suponer que T es regular y transversal al morfismo $\pi: W \longrightarrow Y$. Obsérvese que a lo sumo existe un conjunto finito de puntos cerrados $\{x_1, \dots, x_n\} \subset T$ en los que T no es geoméricamente permisible para el morfismo π .

Una vez más fijemos $x \in T$ un punto cerrado con $\pi(x) = y$ y $m(y) = \tau > \infty$ en $\mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente

$$\{v_1, \dots, v_d\} \tag{2.116}$$

de modo que

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r}, \quad (2.117)$$

donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, $1 \leq r \leq d$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}_{>0}$ para $i = 1, \dots, r$. Para $i = 1, \dots, r$, sea $H_i = V(< v_i >)$. Ordenando convenientemente los elementos en (2.116), podemos suponer que:

$$E(T) = \{H_1, \dots, H_l\} \quad (2.118)$$

con $1 \leq l \leq r$. Bajo esta hipótesis existen $f_{l+1}, \dots, f_{d-1} \in \mathcal{O}_{W,x}$ de modo que:

$$\mathcal{I}(T)_x = < v_1, \dots, v_l, f_{l+1}, \dots, f_{d-1} >. \quad (2.119)$$

Puesto que T es transversal al morfismo en x obsérvese que para $k = l + 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} < \text{In}_x(v_1), \dots, \text{In}_x(v_l), \text{In}_x(f_{l+1}), \dots, \text{In}_x(f_{d-1}), \text{In}_x(v_k) > = \\ &= < \text{In}_x(v_1), \dots, \text{In}_x(v_d) > \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Distinguiremos ahora tres casos en función del valor de l en (2.118) y r en (2.117):

- i. Si $l = r$ (i.e. $E(T) = E(x)$). Entonces T es geoméricamente permisible en x .
- ii. Si $l = r - 1$ (i.e. $E(T) = E(x) \cup H_r$). Entonces por (2.120) T es geoméricamente permisible en x .
- iii. Si $l < r - 1$. En este caso explotamos con centro x :

$$W_1 \longrightarrow W.$$

Sea T_1 el transformado estricto de T , E_1 el divisor excepcional y para $i = 1, \dots, r$ sea $(H_i)_1$ el transformado estricto de H_i . Entonces por (2.120) y para $i = l + 1, \dots, r$:

$$T_1 \cap (H_i)_1 \cap E_1 = \emptyset,$$

y si $z = T_1 \cap E_1$, es un punto cerrado entonces por (2.120) T_1 es transversa al morfismo $W_1 \longrightarrow Y$ en el punto cerrado z y por tanto geoméricamente permisible. \square

2.10.8 Demostración de la Proposición 2.10.2:

Por el Lema 2.10.7, podemos suponer que T es un centro geoméricamente permisible.

A continuación distinguiremos dos casos:

- i. Si existe un punto cerrado $x \in T$ tal que $\Delta_{T,x} = 0$ dado que T es irreducible,

$$\Delta_T = 0$$

y por lo tanto T es un centro permisible de segunda clase en todos sus puntos (Teorema 2.7.9).

- ii. Supongamos que existe un punto cerrado $x \in T$ tal que

$$\Delta_{T,x} \neq 0, \text{ y } \Delta_{T,x} \neq \mathcal{O}_{T,x}.$$

Entonces T es genéricamente permisible de primera clase. Sea $y = \pi(T)$, y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente:

$$\{v_1, \dots, v_d\}, \quad (2.121)$$

de modo que

- $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_r^{\alpha_r} \cdot v_d^{\alpha_d}$, donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad, $1 \leq r \leq d-1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}_{>0}$ y $\alpha_d \geq 0$.
- $\mathcal{I}(T)_x = \langle v_1, \dots, v_{d-1} \rangle$.

Ahora distinguiremos dos casos según el valor del exponente α_d :

- (a) Si $\alpha_d > 0$, entonces el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_{d-1}, \frac{dv_d}{v_d} \right\}, \quad (2.122)$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + a_{r+1} dv_{r+1} + \dots + a_d \frac{dv_d}{v_d} = 0, \quad (2.123)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por 2.7.7 (2.50) el ideal Jacobiano de T en el punto x viene dado por:

$$\Delta_{T,x} = \langle a_1, \dots, a_r, a_d \rangle \mod (\mathcal{I}(T)_x) \quad (2.124)$$

Puesto que T no es permisible en x , existe $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que:

$$\Delta_{T,x} = \langle a_1, \dots, a_r, a_d \rangle \mod (\mathcal{I}(T)_x) = \langle v_d^m \rangle \mod (\mathcal{I}(T)_x).$$

Consideremos la explosión con centro el punto x :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Sea T_1 el transformado estricto de T , E el divisor excepcional, $x_1 = T_1 \cap E$ y $\pi_1 = \pi \circ e$. Para analizar el ideal jacobiano de la curva T_1 en x_1 es suficiente estudiar la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_d}, \dots, \frac{v_{d-1}}{v_d} \right].$$

Para $i = 1, \dots, d-1$ definimos:

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_d}.$$

Obsérvese que x_1 es el punto correspondiente al ideal maximal

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{d-1}, v_d \rangle.$$

Por el Lema 2.6.6, a lo largo de esta carta el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1}, \dots, \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r}, d\bar{v}_{r+1}, \dots, d\bar{v}_{d-1}, \frac{dv_d}{v_d} \right\}, \quad (2.125)$$

La relación (2.123) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + \dots + a_r \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \\ & + a_{r+1} v_d d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} v_d d\bar{v}_{d-1} + \\ & (a_1 + \dots + a_r + a_{r+1} v_d \bar{v}_{r+1} v_d + \\ & + \dots + a_{d-1} \bar{v}_{d-1} v_d + a_d) \frac{dv_d}{v_d} = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Por (2.124) podemos extraer factor común v_1 en esta relación. De este modo se obtiene que la relación que vincula a los generadores del módulo de diferenciales en (2.125) viene dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{v_d} \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + \dots + \frac{a_r}{v_d} \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \\ & + a_{r+1} d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} d\bar{v}_{d-1} + \\ & \left(\frac{a_1}{v_d} + \dots + \frac{a_r}{v_d} + \right. \\ & \left. + a_{r+1} \bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} \bar{v}_{d-1} + \frac{a_d}{v_d} \right) \frac{dv_d}{v_d} = 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Por 2.7.7 (2.50) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_{T,x_1} &= \left\langle \frac{a_1}{v_d}, \dots, \frac{a_r}{v_d}, \frac{a_d}{v_d} \right\rangle \bmod \mathcal{I}(T_1)_{x_1} = \\ &= \langle v_d^{m-1} \rangle \bmod \mathcal{I}(T_1)_{x_1}. \end{aligned}$$

Obsérvese que x_1 es un punto que se encuentra en las mismas condiciones que el punto x (i.e. $\tau = \bar{v}_1^{\alpha_1} \dots \bar{v}_r^{\alpha_r} \cdot v_d^{\alpha'_d} \in \mathcal{O}_{W_1, x_1}$ y $\alpha'_d \in \mathbb{N}_{>0}$). Por lo tanto, en este caso, la demostración de la proposición resulta por explosiones sucesivas en puntos cerrados.

- (b) Si $\alpha_d = 0$, entonces el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \dots, \frac{dv_r}{v_r}, dv_{r+1}, \dots, dv_d \right\} \quad (2.128)$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + \dots + a_r \frac{dv_r}{v_r} + \dots + a_d dv_d = 0, \quad (2.129)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por 2.7.7 (2.50) se tiene que

$$\Delta_{T,x} = \langle a_1, \dots, a_r, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(T)_x = \langle v_d^m \rangle \bmod \mathcal{I}(T)_x, \quad (2.130)$$

donde $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Consideremos la explosión con centro el punto x :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Sea T_1 el transformado estricto de T , E el divisor excepcional, $x_1 = T_1 \cap E$ y $\pi_1 = \pi \circ e$.

Consideramos la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_d}, \dots, \frac{v_{d-1}}{v_d} \right].$$

Para $i = 1, \dots, d-1$ definimos:

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_d}.$$

Nótese que al punto x_1 le corresponde el ideal maximal

$$\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{d-1}, v_d \rangle.$$

Por el Lema 2.6.5 a lo largo de esta carta afín el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1}, \dots, \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r}, d\bar{v}_{r+1}, \dots, d\bar{v}_{d-1}, \frac{dv_d}{v_d} \right\}. \quad (2.131)$$

La relación (2.129) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + \dots + a_r \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \\ & + a_{r+1} v_d d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} v_d d\bar{v}_{d-1} + \\ & + (a_1 + \dots + a_r + \\ & + a_{r+1} v_d \bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} \bar{v}_{d-1} v_d + a_d v_d) \frac{dv_d}{v_d} = 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Por (2.130) podemos extraer factor común v_d en esta última expresión. De este modo obtenemos la relación generadora de todas las que vinculan a los elementos de (2.131):

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{v_d} \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1} + \dots + \frac{a_r}{v_d} \frac{d\bar{v}_r}{\bar{v}_r} + \\ & + a_{r+1} d\bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} d\bar{v}_{d-1} + \\ & + \left(\frac{a_1}{v_d} + \dots + \frac{a_r}{v_d} + \right. \\ & \left. + a_{r+1} \bar{v}_{r+1} + \dots + a_{d-1} \bar{v}_{d-1} + a_d \right) \frac{dv_d}{v_d} = 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Por 2.7.7 (2.50) se tiene que:

$$\Delta_{T_1, x_1} = \langle \frac{a_1}{v_d}, \dots, \frac{a_r}{v_d}, a_d \rangle \bmod \mathcal{I}(T_1)_{x_1} = \langle v_d^k \rangle \bmod \mathcal{I}(T_1)_{x_1},$$

con $k = m$ o $k = m - 1$. Nótese que si bien puede suceder que $k = m$, el punto x_1 está ahora en las condiciones del caso (a), pues $\tau = \bar{v}_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \bar{v}_r^{\alpha_r} \cdot v_d^{\alpha'_d} \in \mathcal{O}_{W_1, x_1}$ con $\alpha'_d \in \mathbb{N}_{>0}$. \square

Capítulo 3

Superficies regulares inmersas.

3.1 Introducción y notación.

En la sección 2.8 del Capítulo 2 hemos introducido la noción de subesquema casi-liso (Definición 2.8.1).

En [V3] se prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.1.1 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y Z un subesquema irreducible y reducido de dimensión 1 y plano sobre Y . Entonces existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ Z_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 = Z \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{Z_i})$ (donde Z_i denota el transformado estricto de Z_{i-1}) de modo que

$$\Delta_{Z_N} = \mathcal{O}_Z,$$

por lo que Z_N es un centro permisible para $W_N \longrightarrow Y$.

El objeto del presente capítulo es probar un resultado similar para superficies regulares. Enunciamos a continuación el resultado central de esta parte de la memoria:

Teorema 3.1.2 *Sea W un esquema de dimensión 3, $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset V(\Delta_{S_i})$ (donde S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}), de modo que

$$\Delta_{S_N} = \mathcal{O}_{S_N}.$$

La principal dificultad con la que hemos topado en el momento de probar este teorema ha sido el estudio y comparación de los ideales jacobianos antes y después de la explosión en un centro permisible.

Por este motivo hemos introducido nuevos invariantes con los que completar la información aportada por el ideal jacobiano de S .

A continuación presentamos un breve esquema de la estrategia que hemos seguido para la demostración del Teorema 3.1.2.

- Encaramos en primer lugar un problema geométrico: lograr por explosiones en centros permisibles que el transformado estricto de S sea un centro geoméricamente permisible. (Este desarrollo se presenta en la sección 3.2).

A tal efecto introducimos el concepto de transversalidad para superficies regulares (Definición 3.2.3). Esta noción se generalizará en la Definición 4.1.2 del Capítulo 4 para el caso de cualquier hipersuperficie, regular o no.

A continuación y utilizando el Teorema 4.1.3 que probaremos en el Capítulo 4, podemos suponer que S es una superficie transversal al morfismo π . En nuestro contexto, y para comodidad del lector, enunciaremos el Teorema 4.1.3 en una versión más débil para superficies regulares, aunque, como ya hemos mencionado, para su demostración nos remitimos al Capítulo 4.

Una vez supuesto que S es transversal al morfismo π , la permisibilidad geométrica se logra sin excesivas dificultades. Este resultado se recoge en el Lema 3.2.1.

- La sección 3.3 está dedicada al estudio del jacobiano de una superficie geoméricamente permisible inmersa en un medio ambiente casi-liso.

En este contexto prestamos especial atención a las curvas regulares que resultan de la fibración inducida en S por el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$. De este modo introducimos el concepto de *curva principal* y *curva principal singular* (3.3.1).

Las curvas principales de S son curvas verticales irreducibles geoméricamente permisibles cuyo interés se desprende de la siguiente propiedad:

Proposición 3.3.2 *Sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible, y $C \subset S$ una curva principal. Entonces*

$$\Delta_S|_C = \Delta_C.$$

Debido a este resultado, estas curvas juegan un papel destacado en el desarrollo de la demostración del Teorema 3.1.2 pues nos permiten definir los invariantes necesarios para llevar nuestro propósito a buen término (ver Corolarios 3.3.3, y 3.3.4).

- En las secciones 3.4 y 3.5 analizamos el comportamiento de nuestros invariantes por explosiones en centros permisibles.

El resultado de la Proposición 3.4.1 nos permite ignorar las componentes de altura 1 del ideal Δ_S siempre que sea conveniente. En este contexto, definimos la función F_S sobre los puntos aislados de $V(\Delta_S)$ (Definición 3.5.2). El objeto de esta función es medir la *falta de permisibilidad* de la superficie S .

En la Proposición 3.5.4 se prueba que el valor máximo de la función F_S en general disminuye por explosiones en centros permisibles, aunque es posible que bajo ciertas condiciones este valor máximo no cambie.

- Para concluir, en la sección 3.6 demostramos que el valor de la función F_S no puede permanecer constante en una secuencia infinita de explosiones en puntos cerrados (3.6.1).

Para ello construimos una curva *formal* cuyos sucesivos transformados estrictos, en la secuencia infinita de explosiones anteriormente mencionada, contienen a todos los puntos de esta cadena. Este argumento

nos llevará considerar anillos completos y a trasladar a este nuevo contexto toda la información con la que estamos trabajando, que recordemos está vinculada a los módulos de diferenciales con polos. En esta parte de la discusión utilizaremos algunos de los resultados que aparecen en [Ku].

Notación.

- En este capítulo W denotará un esquema de dimensión 3, $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular inmersa en W y plana sobre Y .
- Dado un subesquema cerrado $Z \subset W$ denotaremos por Δ_Z a su ideal jacobiano.

3.2 Permisibilidad geométrica para superficies.

Sea W un esquema de dimensión 3. Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y sea $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Recordemos que nuestro propósito es probar el Teorema 3.1.2, ésto es, que existe una secuencia finita de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \longrightarrow Y \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset V(\Delta_{S_{-i}})$ (donde S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}), de modo que el morfismo

$$\pi_N = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_N |_{S_N} : S_N \longrightarrow Y$$

es casi-liso. En particular ésto significa que:

- La restricción de las fibras del morfismo π_N a S_N son curvas regulares con cruzamientos normales.
- La restricción del haz de diferenciales con polos, $\omega(\pi_N)$, a S_N es un haz localmente libre de rango 1.

Durante esta sección nos ocuparemos de probar (i). Obsérvese que esta condición se logra si S_N tiene cruzamientos normales simultáneamente con todas las componentes de las fibras del morfismo π_N . Por tanto nuestro objetivo será probar el siguiente lema:

Lema 3.2.1 *Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset S_i$ (S_i denotará el transformado estricto de S_{i-1}), de modo que S_N es un centro geoméricamente permisible para W_N .

Para llevar a cabo la demostración de este lema necesitamos probar algunos resultados previos que desarrollaremos en los apartados 3.2.2 y 3.2.5:

- En 3.2.2 introduciremos el concepto de transversalidad, y utilizaremos el Teorema 4.1.3 que se probará en el Capítulo 4.
- En 3.2.5 estudiaremos las componentes de altura 1 de Δ_S que sean curvas combinatorias (recordemos que una curva combinatoria se obtiene como intersección de dos componentes de las fibras del morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$, y que los centros combinatorios son siempre permisibles -Observación 2.6.12-).

Estos resultados nos permitirán reducir la demostración del Lema 3.2.1 al caso en que existe un conjunto abierto $U \subset S$ en el que S es geoméricamente permisible y $S - U$ es un conjunto finito de puntos cerrados.

3.2.2 Transversalidad.

Sea W un esquema de dimensión 3 y $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Dado un punto cerrado $x \in W$ sea $\pi(x) = y$ su imagen en Y . Puesto que el morfismo es casi-liso, existe un número finito de superficies regulares con cruzamientos normales $\{H_i\}_{i=1, \dots, n(y)} \subset W$ de modo tal que

$$\pi^{-1}(y) = E_y = \{H_1, \dots, H_{n(y)}\}.$$

Sea $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Para cada punto cerrado $x \in S$ sea f_x una ecuación local de S en $\mathcal{O}_{W,x}$. Si $x \in H_i \in E_y$ en general se tiene que

$$\text{ord}_x f_x |_{H_i} \geq 1,$$

donde $\text{ord}_x f_x|_{H_i}$ denota el orden de la clase de f_x en el anillo local regular $\mathcal{O}_{H_i, x}$.

Definición 3.2.3 Con la notación introducida en 3.2.2 diremos que una superficie regular y plana sobre Y es transversal al morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$ si para todo punto cerrado $x \in S$ y para toda superficie $H_i \in E_y$ con $x \in H_i$ se tiene que:

$$\text{ord}_x f_x|_{H_i} = 1.$$

En el Capítulo 4 desarrollaremos más ampliamente el concepto de transversalidad y generalizaremos esta noción al caso de superficies que no son regulares (Definición 4.1.2). Para comodidad del lector mencionamos aquí el resultado central del Capítulo 4 adaptado al contexto que nos ocupa:

Lema 3.2.4 Sean W un esquema de dimensión 3, $W \xrightarrow{\pi} Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular y plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W = W_0 \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ S_N & & \dots & & S_1 & & S = S_0 \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset S_i$ (S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}), de modo tal que el morfismo

$$\pi_N = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_N : W_N \longrightarrow Y$$

es casi-liso, y S_N es transversal al morfismo π_N .

3.2.5 Nos ocupamos ahora del estudio de las componentes de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$ que son además curvas combinatorias.

Lema 3.2.6 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso y $S \subset W$ una superficie regular. Existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W = W_0 \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ S_N & & \dots & & S_1 & & S = S_0 \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset V(\Delta_{S_i})$ (S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}) de modo tal que Δ_{S_N} no tiene componentes de altura 1 que sean combinatorias.

Demostración: Sea $C \subset V(\Delta_S)$ una curva combinatoria, y sea

$$r = \text{ord}_C(\Delta_S).$$

Consideremos un punto cerrado $x \in C \subset V(\Delta_S)$, con $\pi(x) = y \in Y$ y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. Sea $\{D_1, D_2\}$ una base de $\omega^*(\pi)_x$. Notemos que

$$\Delta_{S,x} = \langle D_1(f_x), D_2(f_x) \rangle \pmod{\langle f_x \rangle}.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente:

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

tal que

- Se tiene una expresión para τ :

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3} \quad (3.1)$$

donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_{>0}$, y $\alpha_3 \geq 0$.

- Se tiene la siguiente expresión local para el ideal correspondiente a C :

$$\mathcal{I}(C)_x = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Obsérvese que con esta notación y estas condiciones, para $i = 1, 2$:

$$D_i(v_1) \in \langle v_1 \rangle, \text{ y } D_i(v_2) \in \langle v_2 \rangle. \quad (3.2)$$

Sea $H_i = V(\langle v_i \rangle)$, con $i = 1, 2$. Distinguiremos ahora dos casos según el valor de α_3 en (3.1):

- Si $\alpha_3 = 0$.

En tal caso el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\} \quad (3.3)$$

vinculados por una relación

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 dv_3 = 0 \quad (3.4)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Consideremos la explosión con centro la curva C :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Sea $\pi_1 = e \circ \pi$, S_1 el transformado estricto de S y E el divisor excepcional. Por simetría para probar el lema nos es suficiente analizar la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2} \right].$$

Denotaremos por \bar{v}_1 al elemento $\frac{v_1}{v_2}$, y por \bar{f}_x al elemento $\frac{f_x}{v_2}$. Por el Lema 2.6.6, a lo largo de esta carta el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d\bar{v}_1}{\bar{v}_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\}. \quad (3.5)$$

Para cada punto cerrado $y \in S_1 \cap E$ las derivaciones D_1 y D_2 inducen de manera natural derivaciones en $\omega^*(\pi_1)$, puesto que por (3.2) para $i = 1, 2$:

$$D_i \left(\frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{D_i(v_1)v_2 - v_1 D_i(v_2)}{v_2^2} \in \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2} \right].$$

Por otro lado:

$$D_i(f_x) = D_i(v_2 \bar{f}_x) = v_2 D_i(\bar{f}_x) + \bar{f}_x D_i(v_2), \quad (3.6)$$

por lo que para todo punto cerrado $z \in S_1 \cap E \cap \text{Spec}(\mathcal{B})$ se tiene que:

$$\frac{1}{v_2} D_i(f_x) \in \Delta_{S_1,z}. \quad (3.7)$$

Obsérvese que $S_1 \cap E$ es una curva combinatoria si y sólo si $S_1 \cap E = (H_1)_1 \cap E$ y en tal caso:

$$\text{ord}_{S_1 \cap E} \Delta_{S_1} \leq r - 1,$$

por lo que la demostración del lema se deduce de un argumento inductivo.

- Si $\alpha_3 > 0$.

Entonces el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, \frac{dv_3}{v_3} \right\},$$

vinculados por una relación

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + \frac{dv_3}{v_3} = 0$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$. Argumentando de modo similar a como se ha hecho en el caso anterior se obtienen las mismas conclusiones. \square

3.2.7 Demostración del Lema 3.2.1.

Por el Lema ?? podemos suponer que S es transversal al morfismo

$$\pi : W \longrightarrow Y,$$

y por el Lema 3.2.6 podemos suponer que $V(\Delta_S)$ no tiene componentes de dimensión 1 que sean combinatorias.

Bajo estas hipótesis un análisis caso a caso nos permite concluir que existe, a lo sumo, un conjunto finito de puntos cerrados de S donde ésta no es geoméricamente permisible. De hecho, para probar el Lema 3.2.1 podemos suponer que existe un único punto cerrado $x \in S$ en el que S no es geoméricamente permisible.

Sea $\pi(x) = y \in Y$ y sea $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

de modo tal que

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3}, \quad (3.8)$$

donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Distinguiremos a continuación diferentes casos según el valor de los números naturales α_i :

- i. Si $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, y $\alpha_1 > 0$. En la expresión para τ en (3.8) se tiene que

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1}.$$

Sea $H_1 = V(< v_1 >)$. Puesto que por hipótesis S es transversal al morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ se tiene que

$$\text{ord}_x f_x|_{H_1} = 1,$$

por lo que S es geoméricamente permisible en x . En consecuencia este caso no se puede dar si S no es geoméricamente permisible en x .

- ii. Si para $i = 1, 2, 3$, $\alpha_i > 0$. En este caso en la expresión para τ en (3.8) se tiene que

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3}.$$

Sean $H_1 = V(< v_1 >)$, $H_2 = V(< v_2 >)$, y $H_3 = V(< v_3 >)$.

Obsérvese que

$$< \text{In}_x(v_1), \text{In}_x(v_2), \text{In}_x(v_3) > \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}), \quad (3.9)$$

generan un ideal maximal en $\text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x})$. Puesto que S es transversal al morfismo $\pi : W \rightarrow Y$, para $i = 1, 2, 3$ se tiene que:

$$< \text{In}_x(f_x) > \not\subset < \text{In}_x(v_i) > \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \quad (3.10)$$

Ahora distinguiremos dos casos:

- (a) Supongamos que para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $i \neq j$:

$$< \text{In}_x(f_x), \text{In}_x(v_i), \text{In}_x(v_j) > \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}) \quad (3.11)$$

es un ideal maximal en $\text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x})$. Consideremos la explosión con centro x :

$$W_1 \rightarrow W.$$

Sea S_1 el transformado estricto de S , sea E el divisor excepcional, y para $i = 1, 2, 3$ sea $(H_i)_1$ el transformado estricto de H_i . Entonces por (3.9):

$$S_1 \cap (H_1)_1 \cap (H_2)_1 \cap (H_3)_1 \cap E = \emptyset,$$

y por (3.11), para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $i \neq j$,

$$S_1 \cap (H_i)_1 \cap (H_j)_1 \cap E = \emptyset.$$

Para $i = 1, 2, 3$ consideremos los puntos cerrados

$$z_i = S_1 \cap (H_i)_1 \cap E.$$

Por (3.10) S_1 es geoméricamente permisible en z_i , para $i = 1, 2, 3$, y por el caso (i), S_1 es permisible en todos los puntos cerrados $z \in S_1 \cap E$, $z \neq z_i$.

(b) Supongamos que existen subíndices $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que

$$\text{In}_x(f_x) \in \langle \text{In}_x(v_i), \text{In}_x(v_j) \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \quad (3.12)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\text{In}_x(f_x) \in \langle \text{In}_x(v_1), \text{In}_x(v_2) \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \quad (3.13)$$

Sea $C = H_1 \cap H_2$. Como S no contiene curvas combinatorias existe un número natural $r > 1$ tal que

$$\text{ord}_x f_x|_C = r,$$

i.e.

$$f_x|_C = v_3^r \pmod{\langle v_1, v_2 \rangle}.$$

Consideremos la explosión con centro x :

$$W_1 \longrightarrow W.$$

Sean S_1 el transformado estricto de S , $(C)_1$ el transformado estricto de C , E el divisor excepcional, y para $i = 1, 2, 3$ sea $(H_i)_1$ el transformado estricto de H_i . Por (3.9) y (3.13) debemos prestar especial atención a los puntos cerrados:

- $x_1 = S_1 \cap (H_1)_1 \cap (H_2)_1 \cap E = S_1 \cap (C)_1 \cap E$;
- $x_2 = S_1 \cap (H_3)_1 \cap E$.

Obsérvese, que S_1 es geométricamente permisible en el resto de los puntos cerrados $z \in S_1 \cap E$ ($z \neq x_1, x_2$), ya que todos estos puntos están en las condiciones del caso (i).

Por (3.10) S_1 es geométricamente permisible en x_2 . Podemos concluir por tanto que S_1 es geométricamente permisible en todos sus puntos cerrados salvo quizá en x_1 . Nótese que si \bar{f}_{x_1} es una ecuación local de S_1 en x_1 entonces

$$\text{ord}_{x_1} \bar{f}_{x_1} |_{(C)_1} \leq r - 1. \quad (3.14)$$

Ahora si

$$\text{ord}_{x_1} \bar{f}_{x_1} |_{(C)_1} = 1$$

entonces por (3.10) x_1 es un punto como en el caso (ii)(a), y si

$$\text{ord}_{x_1} \bar{f}_{x_1} |_{(C)_1} > 1$$

entonces x_1 es un punto como en el caso (ii)(b), pero con

$$\text{ord}_{x_1} \bar{f}_{x_1} |_{(C)_1} < r$$

en cuyo caso la conclusión del Lema se deduce de un argumento inductivo. Nótese que por (3.10) la única posibilidad de que x_1 sea un punto como en el caso (ii) (b) es que

$$\text{In}_{x_1} \bar{f} \in \langle \text{In}_{x_1}(\mathcal{I}((H_1)_1)), \text{In}_{x_1}(\mathcal{I}((H_2)_1)) \rangle.$$

- iii. Si existe un subíndice $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\alpha_i = 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\alpha_3 = 0$, y $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. En este caso en la expresión para τ en (3.8) se tiene que

$$p = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}.$$

Sean $H_1 = V(\langle v_1 \rangle)$ y $H_2 = V(\langle v_2 \rangle)$. Si S no es geométricamente permisible en x entonces

$$\text{In}_x(f_x) \in \langle \text{In}_x(v_1), \text{In}_x(v_2) \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \quad (3.15)$$

Por hipótesis S es transversal la morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ en el punto x luego:

$$\text{In}_x(f_x) \notin \langle \text{In}_x(v_1) \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}), \quad (3.16)$$

e

$$\text{In}_x(f_x) \notin \langle \text{In}_x(v_2) \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}). \quad (3.17)$$

Consideremos la curva

$$C = H_1 \cap H_2.$$

Como $C \not\subset S$, (recordemos que S no contiene curvas combinatorias), se tiene que

$$\langle f_x |_C \rangle = \langle v_3^r \rangle \subset \mathcal{O}_{C,x},$$

con $r > 1$. Consideremos la explosión con centro el punto x :

$$W_1 \longrightarrow W.$$

Sea S_1 el transformado estricto de S , $(H_1)_1$ el de H_1 , $(H_2)_1$ el de H_2 , E_1 el divisor excepcional, y $(C)_1 = (H_1)_1 \cap (H_2)_1$. Por (3.15), (3.16) y (3.17) existe a lo sumo un único punto cerrado $x_1 \in S_1 \cap E$ tal que

$$x_1 \in S_1 \cap (H_1)_1 \cap E = S_1 \cap (H_2)_1 \cap E = (H_1)_1 \cap (H_2)_1 \cap E. \quad (3.18)$$

S_1 es geoméricamente permisible en los puntos cerrados $z \in S_1 \cap E$, $z \neq x_1$, pues todos ellos son puntos que están en las condiciones del caso (i). Ahora por (3.18) x_1 es un punto que está en bajo las hipótesis del caso (ii). \square

3.3 El ideal jacobiano de superficies geoméricamente permisibles.

Sea W un esquema de dimensión 3 y $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Consideremos una superficie regular $S \subset W$ geoméricamente permisible y plana sobre Y . Nuestro siguiente propósito es el estudio del jacobiano de S , Δ_S .

El resultado más interesante de esta sección es la vinculación existente entre el ideal jacobiano de una superficie geoméricamente permisible, S , y el de las curvas que resultan de la intersección de S con la fibración inducida por el morfismo $\pi : W \longrightarrow Y$.

3.3.1 Curvas principales y curvas principales singulares.

Sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible. Como el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso, la intersección de S con las fibras del morfismo es un conjunto de curvas regulares con cruzamientos normales contenidas en S . Cada componente irreducible de este conjunto de curvas recibirá el nombre de *curva principal de S* .

Obsérvese además que S es genéricamente lisa (ya que es regular). Como consecuencia $\pi(\Delta_S)$ está soportado sobre un número finito de puntos cerrados de Y , i.e. existen $y_1, \dots, y_l \in Y$, puntos cerrados de Y , tales que

$$\pi(\Delta_S) = \{y_1, \dots, y_l\} = \mathcal{P}.$$

Puesto que el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi liso, existe un conjunto finito de superficies regulares, (verticales), con cruzamientos normales,

$$H_1, \dots, H_n \subset W,$$

tales que

$$\pi^{-1}(\mathcal{P}) = \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{L} = \bigcup_{j=1}^{k_i} C_{ij} = S \cap H_i,$$

donde para $i = 1, \dots, n$, y $j = 1, \dots, k_i$ C_{ij} denota una curva irreducible. Entonces

$$V(\Delta_S) \subset \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{k_i} C_{ij} \right).$$

Sea

$$\mathcal{D}_S = \{C_{ij} \in \mathcal{L} : V(\Delta_S) \cap C_{ij} \neq \emptyset\},$$

El conjunto de curvas principales de S que están en el conjunto \mathcal{D}_S recibirán el nombre de *curvas principales singulares de S* .

Proposición 3.3.2 *Sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible, y sea C una curva principal de S . Entonces*

$$\Delta_S|_C = \Delta_C.$$

Demostración: Sea $x \in S$, un punto cerrado, con $\pi(x) = y$ y

$$m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros

$$\{v_1, v_2, v_3\},$$

de modo que

- $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}$, donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle$.

Ahora distinguiremos dos casos:

- **Caso 1.** Si $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1}$, (i.e. si $\alpha_2 = 0$) con $\alpha_1 > 0$, y $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad.

En este caso, sólo hay una curva principal de S que contiene al punto x :

$$C = S \cap V(\langle v_1 \rangle) = V(\langle v_1, v_3 \rangle).$$

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, dv_3 \right\},$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 dv_2 + a_3 dv_3 = 0,$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por 2.7.7 (2.49) el ideal jacobiano de S viene dado por:

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle},$$

y por 2.7.7 (2.50) el de C es

$$\Delta_{C,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_1, v_3 \rangle}$$

por lo que claramente

$$\Delta_{S,x} |_C = \Delta_{C,x}.$$

- **Caso 2.** $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}$, con $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, y $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ una unidad.

En este caso hay dos curvas principales de S que contienen al punto x :

$$C_1 = S \cap V(< v_1 >) = V(< v_1, v_3 >)$$

y

$$C_2 = S \cap V(< v_2 >) = V(< v_2, v_3 >).$$

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\},$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 dv_3 = 0,$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Con estos datos y por 2.7.7 (2.49) se tiene que

$$\Delta_{S,x} = < a_1, a_2 > \pmod{< v_3 >},$$

y por 2.7.7 (2.50),

$$\Delta_{C_1,x} = < a_1, a_2 > \pmod{< v_1, v_3 >},$$

$$\Delta_{C_2,x} = < a_1, a_2 > \pmod{< v_2, v_3 >},$$

por lo que, de nuevo, la conclusión de la proposición es inmediata. \square

El resultado de la Proposición 3.3.2 conlleva una serie de consecuencias más o menos inmediatas que recogemos en los Corolarios 3.3.3 y 3.3.4.

Corolario 3.3.3 *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.2 se tiene que:*

- Si una curva principal singular de S es permisible entonces es permisible de segunda clase.*
- Cualquier componente irreducible de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$ es siempre permisible.*

- iii. S es un subesquema casi-liso si y sólo si todas sus curvas principales son permisibles de primera clase.

Demostración: Detallamos a continuación la demostración, por separado, de cada uno de los apartados del corolario:

- i. Sea $C \subset S$ es una curva principal singular de S . Si C fuera una curva permisible de primera clase, entonces para todo punto cerrado $x \in C$ se tendría que

$$\Delta_{C,x} = \mathcal{O}_{C,x}.$$

Por la Proposición 3.3.2 en cada punto cerrado $x \in C \subset S$ se tiene que

$$\Delta_{S,x} |_C = \Delta_{C,x}.$$

Por lo tanto para todo punto cerrado $x \in C \subset S$:

$$\Delta_{S,x} = \mathcal{O}_{S,x},$$

y como consecuencia

$$C \cap V(\Delta_S) = \emptyset$$

lo que no puede suceder si C es una curva principal singular de S .

- ii. Sea $C \subset S$ una componente irreducible de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$. Entonces S no es permisible en ninguno de los puntos cerrados $x \in C$. Como C es una curva geoméricamente permisible (3.3.1) y además

$$\Delta_S \subset \mathcal{I}(C) \bmod (\mathcal{I}(S)),$$

la Proposición 2.7.9, nos garantiza que C es permisible.

- iii. Por definición (2.8.1) S es un subesquema casi-liso si y sólo si para todo punto cerrado $x \in S$ se tiene que:

$$\Delta_{S,x} = \mathcal{O}_{S,x},$$

i.e. si y sólo si S es permisible de primera clase en x (Teoremas 2.7.8 y 2.7.9).

Por la Proposición 3.3.2 para toda curva principal C de S y para todo punto cerrado $x \in C \subset S$ se tiene que

$$\Delta_{S,x} |_C = \Delta_{C,x},$$

de donde deducimos S es permisible en x si y sólo si C es permisible de primera clase en x . \square .

Corolario 3.3.4 *Bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.2 existen curvas verticales geoméricamente permisibles $\{C_i\}_{i=1,\dots,m}$, tales que*

$$V(\Delta_S) = C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^m V(\Delta_{C_i}) \right),$$

(donde $\bigcup_{i=k+1}^m V(\Delta_{C_i})$ es un conjunto finito de puntos aislados).

Además, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y para punto cerrado $x \in V(\Delta_{C_i})$, se tiene que:

$$\text{ord}_x(\Delta_S) \leq \text{ord}_x \Delta_{C_i, x}.$$

Demostración: Sea

$$\mathcal{D}_S = \{C_i\}_{i=1,\dots,m} \subset S$$

el conjunto de curvas principales singulares de S . Por definición de curva principal singular se tiene que:

$$V(\Delta_S) \subset \bigcup_{i=1}^m C_i.$$

Ordenando de manera adecuada los elementos de \mathcal{D}_S podemos suponer que

$$\{C_1, \dots, C_k\}$$

es el conjunto de componentes de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$.

Sea ahora C_j una curva principal singular de S con $j > k$. Por la Proposición 3.3.2 se tiene que

$$\Delta_S|_{C_j} = \Delta_{C_j},$$

por lo que se puede concluir que

$$V(\Delta_S) = C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^m V(\Delta_{C_i}) \right).$$

Utilizando una vez más la Proposición 3.3.2 se obtiene que

$$\text{ord}_x(\Delta_{S,x}) \leq \text{ord}_x(\Delta_{C_i,x}),$$

para $i = 1, \dots, m$. \square

Los resultados obtenidos en la Proposición 3.3.2 y los Corolarios 3.3.3 y 3.3.4 revelan la existencia de una estrecha vinculación entre el jacobiano

de una superficie geoméricamente permisible y los jacobianos de sus curvas principales.

Nos proponemos, por tanto, demostrar el Teorema 3.1.2 utilizando no sólo la información que proviene de Δ_S sino también la información procedente de los jacobianos de sus curvas principales singulares. Ésto significa que vamos a tener que manejar diferentes datos al mismo tiempo.

Con el propósito de que los argumentos que presentamos sean lo más claros posibles introducimos a continuación la siguiente terminología.

3.3.5 Como en 3.3.1, denotaremos por \mathcal{D}_S al conjunto de todas las curvas principales singulares de S . En \mathcal{D}_S sólo hay un número finito de curvas, digamos m , que denotaremos a partir de este momento por C_1, \dots, C_m . Así:

$$\mathcal{D}_S = \{C_1, \dots, C_m\}.$$

Para cada punto $x \in V(\Delta_S)$, denotaremos por \mathcal{C}_x al conjunto de curvas principales singulares de S que contengan al punto x , i.e.:

$$\mathcal{C}_x = \{C_i \in \mathcal{D}_S : x \in C_i\}.$$

De este modo, diremos que x es un punto de cruzamiento si $\#\mathcal{C}_x = 2$, y diremos que es un punto sin cruzamiento si $\#\mathcal{C}_x = 1$.

Finalmente, definimos

$$\tilde{\Delta}_S^1 = (\text{ord}_{C_1}\Delta_S, \dots, \text{ord}_{C_m}\Delta_S) \in \mathbb{N}^m,$$

y en cada punto cerrado $x \in V(\Delta_S)$:

$$\tilde{\Delta}_S^0(x) = (\text{ord}_x\Delta_{C_1}, \dots, \text{ord}_x\Delta_{C_m}) \in (\mathbb{N} \cup \infty)^m.$$

Observación 3.3.6 Obsérvese que el conjunto \mathcal{D}_S puede cambiar por explosiones en centros permisibles, ya que, cada vez que explotamos en un centro permisible, la intersección del transformado estricto de S con el divisor excepcional es una nueva curva principal que puede ser singular para el transformado estricto de S .

3.4 Explosiones en curvas permisibles.

El objetivo de esta sección es el estudio de Δ_S , Δ_S^1 y $\Delta_S^0(x)$ por explosiones en curvas permisibles.

Proposición 3.4.1 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible y plana sobre Y . Sea Δ_S el ideal jacobiano de S . Existe una secuencia finita explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

con centros en curvas principales singulares $T_j \subset V(\Delta_{S_i})$, (donde S_i denota el transformado estricto de S_i), de modo que Δ_{S_N} no tiene componentes de altura 1.

Demostración: Como en 3.3.5, sea \mathcal{D}_S el conjunto de todas las curvas principales singulares de S . Supongamos que

$$\mathcal{D}_S = \{C_1, \dots, C_m\}.$$

Consideremos además

$$\vec{\Delta}_S^1 = (\text{ord}_{C_1}(\Delta_S), \dots, \text{ord}_{C_m}(\Delta_S)) \in \mathbb{N}^m.$$

Sea $C_k \subset V(\Delta_S)$ y sea

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & \cup \\ S_1 & & S_0 = S \end{array}$$

la explosión con centro C_k (obsérvese que por el Corolario 3.3.3 la curva C_k es un centro permisible de segunda clase). Comprobaremos a continuación que o bien

$$\#\mathcal{D}_{S_1}^1 < \#\mathcal{D}_S^1,$$

o bien

$$\#\mathcal{D}_{S_1} = \#\mathcal{D}_S, \text{ y } \vec{\Delta}_{S_1}^1 < \vec{\Delta}_S^1.$$

(Para comparar Δ_S^1 con $\Delta_{S_1}^1$ usaremos el orden lexicográfico). De este modo, la demostración de la proposición se deducirá de un argumento inductivo.

Sea $x \in C_k \subset V(\Delta_S)$, un punto cerrado con $\pi(x) = y \in Y$, y

$$m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente de modo que:

- podemos expresar τ como

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} \cdot v_2^{\alpha_2}, \quad (3.19)$$

donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad, y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$;

- $\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle$;
- $\mathcal{I}(C_k)_x = \langle v_1, v_3 \rangle$.

Ahora distinguiremos dos casos, según x sea un punto de cruzamiento o no.

- **Si x no es un punto de cruzamiento.**

Entonces $\alpha_2 = 0$ en la expresión para τ (3.19). En tal caso, el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, dv_3 \right\}, \quad (3.20)$$

vinculados por una relación

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 dv_2 + a_3 dv_3 = 0 \quad (3.21)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Con estos datos, podemos calcular explícitamente el jacobiano de S en el punto x (ver 2.7.7) (2.49):

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}.$$

Puesto que por hipótesis $C_k \subset V(\Delta_S)$,

$$\text{ord}_{C_k} \Delta_{S,x} = r \geq 1,$$

es decir

$$\Delta_{S,x} = v_1^r \cdot \mathcal{I}_{S,x} \pmod{\langle v_3 \rangle},$$

con $\mathcal{I}_{S,x} \notin \langle v_1 \rangle \mathcal{O}_{S,x}$.

En estas condiciones, se tiene que

$$\tilde{\Delta}_S^1 = (\text{ord}_{C_1} \Delta_S, \dots, \text{ord}_{C_{k-1}} \Delta_S, r, \text{ord}_{C_{k+1}} \Delta_S, \dots, \text{ord}_{C_m} \Delta_S).$$

Consideremos

$$W_1 \longrightarrow W$$

la explosión con centro C_k .

Sea S_1 el transformado estricto de S , E el divisor excepcional y $\pi_1 = \pi \circ e$. Para calcular el ideal jacobiano de S_1 es suficiente trabajar en la carta:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_3}{v_1} \right].$$

Definimos:

$$\bar{v}_3 = \frac{v_3}{v_1}.$$

En la carta afín $\text{Spec}(\mathcal{B})$ el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_1)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, d\bar{v}_3 \right\}. \quad (3.22)$$

La relación (3.21) da lugar a la relación:

$$(a_1 + a_3 \bar{v}_3 v_1) \frac{dv_1}{v_1} + a_2 dv_2 + a_3 v_1 d\bar{v}_3 = 0. \quad (3.23)$$

de la que, extrayendo factor común v_1 , obtenemos la relación que vincula a los elementos de (3.22):

$$\left(\frac{a_1}{v_1} + a_3 \bar{v}_3 \right) \frac{dv_1}{v_1} + \frac{a_2}{v_1} dv_2 + a_3 d\bar{v}_3 = 0. \quad (3.24)$$

Por 2.7.7 (2.49), el ideal jacobiano de S_1 a lo largo de la carta $\text{Spec}(\mathcal{B})$ viene dado por:

$$\Delta_{S_1} = \left\langle \frac{a_1}{v_1}, \frac{a_2}{v_1} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_3 \rangle}.$$

Nótese que en tal caso,

$$\frac{1}{v_1} \Delta_S(\mathcal{B}) = \Delta_{S_1},$$

por lo que

$$\Delta_{S_1} = v_1^{r-1} \cdot \mathcal{I}_{S,x} \mathcal{B} \pmod{\langle \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.25)$$

Para $i = 1 \dots, m, i \neq k$, denotemos por $(C_i)_1$ al transformado estricto de la curva C_i en W_1 , y por $(C_k)_1 = E \cap S_1$. Entonces, en la carta en la que estamos trabajando, sea

$$\mathcal{I}((C_k)_1) = \langle v_1, \bar{v}_3 \rangle,$$

y por (3.25),

$$\text{ord}_{C_k} \Delta_{S_1} = r - 1.$$

Si $r = 1$ entonces:

- o bien $(C_k)_1$ no es una curva principal de S_1 , en cuyo caso

$$\# \mathcal{D}_{S_1} < \# \mathcal{D}_S,$$

- o bien $(C_k)_1$ es una curva principal de S_1 , pero entonces

$$\vec{\Delta}_{S_1}^1 = (\text{ord}_{(C_1)_1}, \dots, \text{ord}_{(C_{k-1})_1}, 0, \text{ord}_{(C_{k+1})_1}, \dots, \text{ord}_{(C_m)_1}) < \vec{\Delta}_S^1.$$

Si $r > 1$ entonces:

$$\vec{\Delta}_{S_1}^1 = (\text{ord}_{(C_1)_1}, \dots, \text{ord}_{(C_{k-1})_1}, r - 1, \text{ord}_{(C_{k+1})_1}, \dots, \text{ord}_{(C_m)_1}) < \vec{\Delta}_S^1.$$

- Si x es un punto de cruzamiento.

En tal caso en la expresión para τ (3.19), $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\} \quad (3.26)$$

vinculados por una relación,

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 dv_3 = 0, \quad (3.27)$$

donde alguno de los coeficientes $a_i \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad.

Por 2.7.7 (2.49), el jacobiano de S viene dado por

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}.$$

Consideremos la explosión con centro C_k :

$$W_1 \longrightarrow W.$$

Sea S_1 el transformado estricto de S , E el divisor excepcional y $\pi_1 = \pi \circ e$. Para calcular el jacobiano de S_1 es suficiente analizar la carta:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_3}{v_1} \right].$$

Denotaremos por $\bar{v}_3 = \frac{v_3}{v_1}$. A lo largo de esta carta el módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi_1)$, está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d\bar{v}_3 \right\}. \quad (3.28)$$

La relación (3.27) da lugar a la relación

$$(a_1 + a_3 \bar{v}_3 v_1) \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 v_1 d\bar{v}_3 = 0, \quad (3.29)$$

de la que, extrayendo factor común v_1 obtenemos la relación que vincula a los elementos de (3.28):

$$\left(\frac{a_1}{v_1} + a_3 \bar{v}_3 \right) \frac{dv_1}{v_1} + \frac{a_2}{v_1} \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d\bar{v}_3 = 0. \quad (3.30)$$

En estas condiciones, se tiene que a lo largo de esta carta

$$\Delta_{S_1} = \left\langle \frac{a_1}{v_1}, \frac{a_2}{v_1} \right\rangle \bmod \langle \bar{v}_3 \rangle = \frac{1}{v_1} \Delta_S \mathcal{B} = v_1^{-1} \mathcal{I} \mathcal{B}$$

Ahora, concluimos como en el caso anterior. \square

3.4.2 Con la notación utilizada en la Proposición 3.4.1 llamaremos *proceso de eliminación de la componente $C_k \subset C(\Delta_S)$* a la secuencia de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_r & & \dots & & S_1 & & S_0 = S \end{array}$$

con centros en las curvas $(C_k)_i = S_i \cap E_i$ (donde para $i = 1, \dots, r$, S_i es el transformado estricto de S_{i-1} , E_i el divisor excepcional correspondiente a la explosión $W_i \rightarrow W_{i-1}$ y $(C_k)_0 = C_k$), de modo tal que

$$\text{ord}_{(C_k)_r}(\Delta_{S_r}) = 0.$$

Nos hacemos ahora la siguiente pregunta:

¿Cómo afecta la explosión en una curva al jacobiano de las curvas principales singulares del transformado estricto de S ?

Sea $W_1 \rightarrow W$ la explosión con centro una curva principal permisible, C . Obsérvese que:

- i. W_1 es un esquema casi-liso sobre Y .
- ii. El subesquema S_1 es naturalmente isomorfo a S .
- iii. La transformación que la explosión induce en el medio ambiente se traduce en una alteración del ideal jacobiano de S_1 :

$$\Delta_{S_1} = \mathcal{I}(C)\Delta_S \subset \mathcal{O}_{S_1}. \quad (3.31)$$

Es esta “ley de transformación”, junto con un razonamiento inductivo, la que nos ha permitido probar la Proposición 3.4.1.

Sea C' una curva principal singular de S tal que $C' \cap C \neq \emptyset$ y consideremos la explosión con centro C :

$$W_1 \rightarrow W.$$

Sea S_1 el transformado estricto de S , E al divisor excepcional, y $(C')_1$ el transformado estricto de C' .

Distinguiremos dos casos según la curva C' sea permisible de segunda clase del caso en que no lo sea:

- Si C' es una curva permisible de segunda clase, entonces existe una abierto no vacío $U \subset (C')_1$ tal que para todo punto cerrado $z \in U \subset (C')_1$ se tiene que

$$\Delta_{(C')_1, z} = 0 \subset \mathcal{O}_{(C')_1, z}.$$

En consecuencia

$$\Delta_{(C')_1} = 0 \subset \mathcal{O}_{(C')_1}.$$

Por otro lado $(C')_1$ es geoméricamente permisible para el morfismo

$$\pi_1 : W_1 \longrightarrow Y.$$

Bajo estas condiciones el Teorema 2.7.9 nos garantiza que $(C')_1$ es de nuevo un centro permisible de segunda clase para W_1 .

- Supongamos que C' no es una curva permisible. Por la Proposición 3.3.2 sabemos que:

$$\Delta_{C'} = \Delta_S|_{C'},$$

y

$$\Delta_{(C')_1} = \Delta_{S_1}|_{(C')_1}.$$

Esta última observación, junto con la ley de transformación del jacobiano de S por explosiones en curvas (3.31) y un razonamiento inductivo, prueban el siguiente lema:

Lema 3.4.3 Sean $C_k, C_l \in \mathcal{D}_S$, $k \neq l$ y $x = C_k \cap C_l$. Supongamos que C_k es una componente de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$ y que C_l no es permisible en el punto x . Sean

$$\text{ord}_{C_k}(\Delta_S) = r, \text{ y } \text{ord}_x \Delta_{C_l, x} = s, \quad r \leq s.$$

Si la secuencia de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ S_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \\ ((C_l)_r, x_r) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & ((C_l)_1, x_1) & \longrightarrow & ((C_l)_0, x_0) \doteq (C_l, x) \end{array}$$

es un proceso de eliminación de la componente C_k , y $x_i = (C_l)_i \cap E_i$ (donde E_i denota el divisor excepcional en la explosión $W_i \longrightarrow W_{i-1}$ y $(C_l)_i$ es el transformado estricto de $(C_l)_{i-1}$), entonces

$$\text{ord}_{x_r} \Delta_{(C_l)_r} = s - r.$$

3.5 La función F_S .

Por el Corolario 3.3.3, el Teorema 3.1.2 queda probado si se demuestra que existe una secuencia finita de explosiones en centros permisibles, tal que todas las curvas principales del transformado estricto de S son permisibles de primer tipo.

A tal efecto nuestra estrategia consistirá en:

- i. Siempre que sea necesario, explotar en curvas permisibles para lograr que el jacobiano del transformado estricto de S no tenga componentes de altura 1.
- ii. Explotar en puntos cerrados y después en curvas principales singulares hasta lograr que todas las curvas principales del transformado estricto de S sean permisibles del primer tipo.

A continuación nos proponemos estudiar el comportamiento de $\tilde{\Delta}_S^0(x)$ por explosiones en puntos cerrados.

Con este propósito haremos una clasificación de los puntos aislados de $V(\Delta_S)$.

3.5.1 Clasificación de los puntos aislados de $V(\Delta_S)$.

Como ya se hizo en 3.3.5, en primer lugar clasificaremos los puntos aislados de $V(\Delta_S)$ según el número de curvas principales singulares que pasen por él:

- Puntos de Cruzamiento: si $\#C_x = 2$.
- Puntos sin Cruzamiento: si $\#C_x = 1$.

Recordemos que por la Proposición 3.3.2 para todo curva principal singular $C \subset V(\Delta_S)$ y para todo punto cerrado $x \in C \subset S$ se tiene que

$$\text{ord}_x(\Delta_{S,x}) \leq \text{ord}_x(\Delta_{C,x}). \quad (3.32)$$

A continuación clasificaremos los puntos aislados de $V(\Delta_S)$ según se dé la igualdad o no en (3.32).

Clasificación de los puntos de cruzamiento.

Sea $x \in V(\Delta_S)$ un punto de cruzamiento, con $\pi(x) = y \in Y$, y

$$m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente

$$\{v_1, v_2, v_3\},$$

de modo tal que:

- $\tau = vv_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}$ donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_{>0}$;
- $\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle$.

Sea

$$\mathcal{C}_x = \{C_1, C_2\}$$

con

$$\mathcal{I}(C_1)_x = \langle v_1, v_3 \rangle \text{ y } \mathcal{I}(C_2)_x = \langle v_2, v_3 \rangle.$$

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\} \quad (3.33)$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 dv_3 = 0, \quad (3.34)$$

donde alguno de los coeficientes es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por 2.7.7 (2.49) sabemos que

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}. \quad (3.35)$$

y por la Proposición 3.3.2,

$$\Delta_{C_1,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_1, v_3 \rangle}, \quad (3.36)$$

$$\Delta_{C_2,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_2, v_3 \rangle}. \quad (3.37)$$

Si $\text{ord}_x(\Delta_{S,x}) = r$ definimos $\text{In}_x(\Delta_{S,x})$ como la imagen de $\Delta_{S,x}$ por la aplicación natural

$$\text{In}_x : \mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{W,x}).$$

Obsérvese que con esta definición, $\text{In}_x(\Delta_{S,x})$ es el conjunto de las clases de los elementos de $\Delta_{S,x}$ en $m(x)^r/m(x)^{r+1}$.

Con esta notación establecemos la siguiente clasificación:

i. Diremos que x es un punto de primer tipo si:

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_1) \rangle \subset \text{Gr}(\mathcal{O}_{S,x}),$$

ó

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_2) \rangle \subset \text{Gr}(\mathcal{O}_{S,x}).$$

ii. Diremos que x es un punto de segundo tipo si no es de primer tipo.

Clasificación de los puntos sin cruzamiento.

Sea $x \in S$ un punto sin cruzamiento, con $\pi(x) = y \in Y$ y

$$m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros adecuado,

$$\{v_1, v_2, v_3\},$$

de modo que:

- $\tau = v \cdot v^{\alpha_1}$, donde $v \in \mathcal{O}_{W,x}$ es una unidad, y $\alpha_1 \in N_{>0}$.
- $\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle$.

Con estos datos, el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, dv_3 \right\}, \quad (3.38)$$

vinculados por una relación,

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 dv_2 + a_3 dv_3 = 0, \quad (3.39)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Por 2.7.7 (2.49) el ideal jacobiano de S viene dado por

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}. \quad (3.40)$$

Sea

$$r = \text{ord}_x(\Delta_{S,x}). \quad (3.41)$$

Sea C_1 , la curva principal singular de S que contiene a x ,

$$\mathcal{I}(C_1) = \langle v_1, v_3 \rangle.$$

Por la Proposición 3.3.2 su ideal jacobiano viene dado por:

$$\Delta_{C_1,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_1, v_3 \rangle}. \quad (3.42)$$

i. Diremos que x es un punto de primer tipo si:

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_1) \rangle \subset \text{Gr}(\mathcal{O}_{S,x}).$$

ii. Diremos que x es un punto de segundo tipo si no es de primer tipo.

Si $V(\Delta_S)$ no tiene componentes de dimensión 1 definiremos una función, F_S , que utilizaremos para medir el cambio de $\tilde{\Delta}_S^0(x)$ por explosiones en centros permisibles.

Definición 3.5.2 Sea $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, de dimensión 3, y sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible y plana sobre Y . Supongamos que Δ_S no tiene componentes de altura 1. Entonces definimos la función,

$$F_S : S \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

del siguiente modo:

i. Si $x \notin V(\Delta_S)$:

$$F_S(x) = (0, 0, 0, 0).$$

ii. Si x es un punto de cruzamiento, i.e.

$$\mathcal{C}_x = \{C_{i_1}, C_{i_2}\} \text{ con } i_1 < i_2,$$

y $s = \max\{\text{ord}_x(\Delta_{C_{i_1}}), \text{ord}_x(\Delta_{C_{i_2}})\}$, entonces:

$$F_S(x) = (\text{ord}_x(\Delta_S), s, 1, 0).$$

iii. Si x es un punto sin cruzamiento de primer tipo y

$$\mathcal{C}_x = \{C_{i_1}\},$$

entonces:

$$F_S(x) = (\text{ord}_x(\Delta_S), \text{ord}_x(\Delta_{C_{i_1}}), 1, 1).$$

iv. Si x es un punto sin cruzamiento de segundo tipo y

$$\mathcal{C}_x = \{C_{i_1}\},$$

entonces:

$$F_S(x) = (\text{ord}_x(\Delta_S), \text{ord}_x(\Delta_{C_{i_1}}), 0, 0).$$

Ordenaremos el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ utilizando el orden lexicográfico. Así definimos:

$$\underline{\text{Max}}(F_S) = \{x \in S : F_S(x) = \text{Max}(F_S(x))\}.$$

Observación 3.5.3 Obsérvese, que la función F_S sólo se define si $V(\Delta_S)$ no tiene componentes de dimensión 1. Supongamos que partimos de una superficie S sobre la que podemos definir la función F_S y sea

$$W_1 \longrightarrow W$$

la explosión con centro un punto cerrado. Sea S_1 el transformado estricto de S , y E el divisor excepcional. Es posible que

$$\text{ord}_{S_1 \cap E} \Delta_{S_1} \geq 1$$

en cuyo caso no podremos definir la función F_{S_1} .

Por la Proposición 3.4.1, existe una secuencia finita de explosiones en centros permisibles:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \longrightarrow Y \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

de modo que Δ_{S_N} no tiene componentes de altura 1, y por lo tanto estaremos en condiciones de definir la función F_{S_N} , que compararemos con F_S .

A partir de este momento adoptaremos el siguiente convenio: Por la Proposición 3.4.1, podemos suponer que Δ_S no tiene componentes de altura 1, por lo que podemos definir F_S . A continuación, consideramos la explosión con centro un punto cerrado convenientemente escogido, y después un proceso de eliminación de componentes de altura 1, lo que nos permitirá definir la función F sobre el transformado estricto de S .

Proposición 3.5.4 *Sea $S \subset W$ una superficie geoméricamente permisible cuyo ideal jacobiano Δ_S no tiene componentes de altura 1. Sea $x \in V(\Delta_S)$, con*

$$x \in \underline{\text{Max}}F_S,$$

y sea

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \xrightarrow{\pi} Y \\ S_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

la explosión con centro x seguida de una eliminación de componentes de altura 1. Si S_N denota el transformado estricto de S en W_N y E_N es el divisor excepcional correspondiente a la última explosión, entonces

$$\text{Max}(F_{S_N}) \leq \text{Max}F_S,$$

y si existe un punto cerrado $z \in S_N \cap E_N$ tal que

$$F_{S_N}(z) = \text{Max}F_S$$

entonces:

- i. z es el único punto cerrado de $S_N \cap E_N$ en el que la función F_{S_N} toma el valor $\text{Max}(F_S)$.
- ii. z es un punto racional sobre $\mathcal{O}_{S,x}$.
- iii. z es un punto sin cruzamiento de segundo tipo.

Demostración: Sea $x \in \underline{\text{Max}}F_S$, de modo que $\pi(x) = y \in Y$, y

$$m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}.$$

Supongamos que

$$\text{ord}_x(\Delta_S) = r.$$

Puesto que desarrollaremos un argumento local, sin pérdida de generalidad podemos suponer que x es el único punto aislado de $V(\Delta_S)$.

En $\mathcal{O}_{W,x}$, escogemos un sistema regular de parámetros adecuado

$$\{v_1, v_2, v_3\}, \quad (3.43)$$

de modo que

- Se tiene una expresión para τ :

$$\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}, \quad (3.44)$$

donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$, y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$.

- Tenemos la siguiente expresión para una ecuación local de S :

$$\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle. \quad (3.45)$$

Para desarrollar la demostración de esta proposición, distinguiremos diferentes casos según el tipo de punto aislado en el que vayamos a explotar.

Si x es un punto de cruzamiento.

En tal caso, en la expresión para τ (3.44) se tiene que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Consideremos $\mathcal{C}_x = \{C_1, C_2\}$, con

- $\mathcal{I}(C_1)_x = \langle v_1, v_2 \rangle$,
- $\mathcal{I}(C_2)_x = \langle v_2, v_3 \rangle$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, \frac{dv_2}{v_2}, dv_3 \right\}$$

vinculados por una relación,

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 \frac{dv_2}{v_2} + a_3 dv_3 = 0, \quad (3.46)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Con estos datos, podemos describir los jacobianos (2.7.7):

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}, \quad (3.47)$$

$$\Delta_{C_1,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_1, v_3 \rangle}, \quad (3.48)$$

y

$$\Delta_{C_2,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_2, v_3 \rangle}. \quad (3.49)$$

Consideremos los números naturales:

$$\text{ord}_x(\Delta_{S,x}) = r, \text{ord}_x(\Delta_{C_1,x}) = s_1, \text{ord}_x(\Delta_{C_2,x}) = s_2.$$

(recordemos que por el Corolario 3.3.4, $r \leq s_1, s_2$).

Sea $s = \max\{s_1, s_2\}$, entonces:

$$F_S(x) = (r, s, 1, 0). \quad (3.50)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\text{ord}_x a_1 \mid s = r.$$

Consideremos a continuación, la explosión en el punto x :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Denotaremos por S_1 el transformado estricto de S , $(C_1)_1$ el de C_1 , $(C_2)_1$ el de C_2 , y por E_1 al divisor excepcional. Sean, además, $(C_3)_1 = S_1 \cap E_1$, y $\pi_1 = \pi \circ e$.

Consideremos la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2} \right].$$

Para $i = 1, 3$ definimos:

$$(v_i)_1 = \frac{v_i}{v_2}.$$

A lo largo de esta carta, el módulo de diferenciales con polos está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d(v_3)_1 \right\}. \quad (3.51)$$

la relación (3.46) da lugar a la relación:

$$a_1 \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + (a_1 + a_2 + a_3 v_2 (v_3)_1) \frac{dv_2}{v_2} + a_3 v_2 d(v_3)_1 = 0. \quad (3.52)$$

Extrayendo factor común v_2 , encontramos la relación que vincula a los elementos de (3.51):

$$\frac{a_1}{v_2} \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + \left(\frac{a_1}{v_2} + \frac{a_2}{v_2} + a_3 (v_3)_1 \right) \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d(v_3)_1 = 0. \quad (3.53)$$

Por 2.7.7 (2.49), para todo punto cerrado $z \in V(< v_2 >) \cap S_1$ el ideal jacobiano de S_1 viene dado por

$$\Delta_{S_1, z} = \langle \frac{a_1}{v_2}, \frac{a_2}{v_2} \rangle (\text{mod } < (v_3)_1 >) = v_2^{r-1} \langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^r} \rangle (\text{mod } < (v_3)_1 >)$$

Sea $x_1 = (C_1)_1 \cap E_1$. Por la Proposición 3.3.2:

$$\Delta_{(C_1)_1, x_1} = \langle \frac{a_1}{v_2}, \frac{a_2}{v_2} \rangle (\text{mod } < \bar{v}_1, (v_3)_1 >).$$

En esta carta la curva $(C_3)_1 = S_1 \cap E_1$ se describe como:

$$\mathcal{I}((C_3)_1) = \langle v_2, (v_3)_1 \rangle.$$

Los cálculos en la carta afín

$$\mathcal{O}_{W, x} \left[\frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1} \right]$$

son similares a los que acabamos de efectuar. Denotaremos por $x_2 = (C_2)_1 \cap E_1$.

Si $r > 1$ consideramos un proceso de eliminación de la componente $(C_3)_1$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_r & \xrightarrow{e_r} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \xrightarrow{\pi} Y \\ S_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

Denotaremos por S_i el transformado estricto de S_{i-1} , $(C_1)_i$ y $(C_2)_i$ los transformados estrictos de $(C_1)_{i-1}$ y $(C_2)_{i-1}$ respectivamente, por E_i al divisor excepcional correspondiente a la explosión

$$W_i \longrightarrow W_{i-1}$$

y por $(C_3)_i = S_i \cap E_i$. Finalmente sea $\pi_r = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_r$.

Consideremos la carta afín

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2^r} \right].$$

Si denotamos por

$$(v_1)_1 = \frac{v_1}{v_2}, \text{ y } (v_3)_r = \frac{v_3}{v_2^r}$$

a lo largo de esta carta afín el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_r)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d(v_3)_r \right\}. \quad (3.54)$$

Un razonamiento inductivo nos permite deducir que la relación que vincula a los elementos de (3.54) es:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{v_2^r} \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + \\ & + \left(\frac{a_1}{v_2^r} + \frac{a_2}{v_2^r} + r a_3 (v_3)_r \right) + \\ & + \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d(v_3)_r = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por 2.7.7 (2.49) sabemos que en esta carta afín:

$$\Delta_{S_r} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.56)$$

Sea $(x_1)_r = (C_1)_r \cap E_r$. Por la Proposición 3.3.2:

$$\Delta_{(C_1)_r, (x_1)_r} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_3 \rangle_{(x_1)_r}} \quad (3.57)$$

$$\Delta_{(C_3)_r} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.58)$$

Por analogía denotaremos por $(x_2)_r$ al punto cerrado $(C_2)_r \cap E_r$.

Obsérvese que $\frac{a_1}{v_2^r} \in \mathcal{O}_{S_r}$ es el transformado estricto de $a_1|_S \in \mathcal{O}_{S,x}$ tras la explosión con centro x y que la explosión con centro una curva induce la identidad sobre S_1 .

Si para todo punto cerrado $y \in (C_3)_r$ se tiene que

$$\text{ord}_y(\Delta_{S_r}) < r$$

entonces por (3.50) claramente

$$\text{Max}(F_{S_N}) < \text{Max} F_S.$$

Si por el contrario existe un punto cerrado $z \in S_r \cap E_r$ tal que

$$\text{ord}_z(\Delta_{S_{r+1}}) = r$$

entonces existe un polinomio homogéneo de grado 1,

$$l \in \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x})$$

tal que

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle = \langle l^r \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x}),$$

y en particular

$$\langle \text{In}_x(a_1) \rangle = \langle l^r \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x}).$$

Nótese que en este caso existe un único punto cerrado $z \in S_r \cap E_r$ en el que Δ_{S_r} es un ideal propio. Además z es racional sobre $\mathcal{O}_{S,x}$.

En este contexto la función F_{S_r} se define como sigue:

- Si x , es un punto de primer tipo entonces o bien

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_1) \rangle,$$

i.e.

$$\langle \text{In}_x(v_1) \rangle = \langle l \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x})$$

y en tal caso $z = (C_1)_r \cap E_r = (C_1)_r \cap (C_3)_r = (x_1)_r$, o bien

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S,x}) \rangle = \langle l^r \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_2) \rangle$$

i.e.

$$\langle \text{In}_x(v_2) \rangle = \langle l \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x})$$

en cuyo caso $z = (C_2)_r \cap E_r = (C_2)_r \cap (C_3)_r = (x_2)_r$.

En cualquiera de los dos casos z es un punto de cruzamiento. Por el Lema 3.4.3 además se tiene que

$$\text{ord}_z(\Delta_{(C_1)_r, z}) = s_1 - r$$

y

$$\text{ord}_z(\Delta_{(C_2)_r, z}) = s_2 - r.$$

Si $z = (x_1)_r$ entonces $s_1 > r = s_2$. Sea $s' = \max\{s_1 - r, r\}$. En tal caso:

$$F_{S_r}(z) = (r, s', 1, 0) < F_S(x),$$

y $(C_2)_r$ es una curva permisible de primera clase en z (véase (3.50)). Si $z = (x_2)_r$ entonces $s_2 > r = s_1$. Sea $s' = \max\{s_2 - r, r\}$. En tal caso:

$$F_{S_r}(z) = (r, s', 1, 0) < F_S(x),$$

y $(C_1)_r$ es una curva permisible de primera clase en z (véase (3.50)).

- Si x es un punto de segundo tipo entonces

$$\text{In}_x(\Delta_{S, x}) \not\subset \langle \text{In}_x(v_1) \rangle,$$

y

$$\text{In}_x(\Delta_{S, x}) \not\subset \langle \text{In}_x(v_2) \rangle,$$

por lo que $(C_1)_r$ y $(C_2)_r$ son permisibles de primera clase en $(x_1)_r$ y $(x_2)_r$, respectivamente y como consecuencia el punto z no es un punto de cruzamiento. En tal caso $\mathcal{C}_z = \{(C_3)_r\}$, y z es un punto de segundo tipo ya que por 3.3.2:

$$\Delta_{(C_3)_r, z} = \Delta_{S_r} |_{(C_3)_r} = \langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^r} \rangle \pmod{\langle v_2, (v_3)_r \rangle}.$$

Obsérvese además que z es el único punto cerrado donde $(C_3)_r$ no es permisible. Concluimos por tanto que:

$$F_{S_1}(z) = (r, r, 0, 0) < F_S(x)$$

(véase (3.50)).

Si x es un punto sin cruzamiento.

En tal caso, en la expresión para τ (3.44) se tiene que $\alpha_2 = 0$. Consideremos $\mathcal{C}_x = \{C_1\}$, con

- $\mathcal{I}(C_1)_x = \langle v_1, v_2 \rangle$.

El módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dv_1}{v_1}, dv_2, dv_3 \right\}$$

vinculados por una relación:

$$a_1 \frac{dv_1}{v_1} + a_2 dv_2 + a_3 dv_3 = 0, \quad (3.59)$$

donde alguno de los coeficientes a_i es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$.

Con estos datos, podemos describir los jacobianos (2.7.7):

$$\Delta_{S,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_3 \rangle}, \quad (3.60)$$

y

$$\Delta_{C_1,x} = \langle a_1, a_2 \rangle \pmod{\langle v_1, v_3 \rangle}. \quad (3.61)$$

Consideremos los números naturales:

$$\text{ord}_x(\Delta_{S,x}) = r, \text{ y } \text{ord}_x(\Delta_{C_1,x}) = s_1.$$

(recordemos que por el Corolario 3.3.4, $r \leq s_1$).

Con estos datos se tiene que:

- Si x es un punto de primer tipo:

$$F_S(x) = (r, s_1, 1, 1). \quad (3.62)$$

Obsérvese que en tal caso $s_1 > r$.

- Si x es un punto de segundo tipo:

$$F_S(x) = (r, s_1, 0, 0). \quad (3.63)$$

Nótese que en tal caso $s_1 = r$.

Consideremos la explosión en el punto x :

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Denotaremos por S_1 el transformado estricto de S , por $(C_1)_1$ al de C_1 , y por E_1 al divisor excepcional. Sean, además, $(C_2)_1 = S_1 \cap E_1$, y $\pi_1 = \pi \circ e$.

Consideremos la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2} \right].$$

Para $i = 1, 3$ definimos:

$$(v_i)_1 = \frac{v_i}{v_2}.$$

A lo largo de esta carta, el módulo de diferenciales con polos está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d(v_3)_1 \right\}. \quad (3.64)$$

La relación (3.59) da lugar a la relación:

$$a_1 \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + (a_1 + a_2 v_2 + a_3 v_2 (v_3)_1) \frac{dv_2}{v_2} + a_3 v_2 d(v_3)_1 = 0. \quad (3.65)$$

Extrayendo factor común v_2 encontramos la relación que vincula a los elementos de (3.64):

$$\frac{a_1}{v_2} \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + \left(\frac{a_1}{v_2} + a_2 + a_3 (v_3)_1 \right) \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d(v_3)_1 = 0. \quad (3.66)$$

Por 2.7.7 (2.49), para todo punto cerrado $z \in V(\langle v_2 \rangle) \cap S_1$ el ideal jacobiano de S_1 viene dado por

$$\Delta_{S_1,z} = \langle \frac{a_1}{v_2}, a_2 \rangle \pmod{\langle (v_3)_1 \rangle}.$$

Sea $x_1 = (C_1)_1 \cap E_1$. Por la Proposición 3.3.2:

$$\Delta_{(C_1)_1, x_1} = \langle \frac{a_1}{v_2}, a_2 \rangle \pmod{\langle \bar{v}_1, (v_3)_1 \rangle}.$$

En esta carta la curva $(C_3)_1 = S_1 \cap E_1$ se describe como:

$$\mathcal{I}((C_3)_1) = \langle v_2, (v_3)_1 \rangle.$$

- Si $\text{ord}_x a_1|_S = r$ entonces en esta carta afín;

$$\Delta_{S_1} = v_2^{r-1} < \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^{r-1}} > \pmod{< (v_3)_1 > .}$$

Si $r > 1$ consideramos el proceso de eliminación de la componente $(C_2)_1$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_r & \xrightarrow{e_r} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \xrightarrow{\pi} Y \\ S_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

Sea S_i el transformado estricto de S_{i-1} , $(C_i)_i$ el transformado estricto de $(C_1)_{i-1}$, E_i el divisor excepcional correspondiente a la explosión:

$$W_i \longrightarrow W_{i-1}$$

$$(C_2)_i = S_i \cap E_i, \text{ y } \pi_r = \pi \circ e_r \circ \dots \circ e_1.$$

Consideremos la carta afín

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2^r} \right].$$

Si denotamos por

$$(v_1)_1 = \frac{v_1}{v_2}, \text{ y } (v_3)_r = \frac{v_3}{v_2^r}$$

a lo largo de esta carta afín el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_r)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d(v_3)_r \right\}. \quad (3.67)$$

Un razonamiento inductivo nos permite deducir que la relación que vincula a los elementos de (3.67) es:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{v_2^r} \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + \\ & + \left(\frac{a_1}{v_2^r} + \frac{a_2}{v_2^{r-1}} + r a_3 (v_3)_r \right) + \\ & + \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d(v_3)_r = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por 2.7.7 (2.49) sabemos que en esta carta afín:

$$\Delta_{S_1} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^{r-1}} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_3 \rangle}; \quad (3.69)$$

y por la Proposición 3.3.2:

$$\Delta_{(C_1)_{r,x_1}} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^{r-1}} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_3 \rangle} \quad (3.70)$$

$$\Delta_{(C_2)_r} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^r}, \frac{a_2}{v_2^{r-1}} \right\rangle \pmod{\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.71)$$

Obsérvese que en este caso $\left(\frac{a_1}{v_2^r}\right)$ es el transformado estricto del elemento a_1 en \mathcal{O}_{S_1} y que las explosiones en centros de dimensión 1 inducen la identidad en S_1 .

- Si $\text{ord}_x a_1|_S > r$ entonces en la carta afín:

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2} \right],$$

se tiene que:

$$\Delta_{S_1} = v_2^r \left\langle \frac{a_1}{v_2^{r+1}}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle (v_3)_1 \rangle}.$$

Como $r \geq 1$ consideramos el proceso de eliminación de la componente $(C_2)_1$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_{r+1} & \xrightarrow{e_{r+1}} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \xrightarrow{\pi} Y \\ S_{r+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & S_0 = S \end{array}$$

Sea S_i el transformado estricto de S_{i-1} , $(C_1)_i$ el transformado estricto de $(C_1)_{i-1}$, E_i el divisor excepcional correspondiente a la explosión:

$$W_i \longrightarrow W_{i-1}$$

$$(C_2)_i = S_i \cap E_i \text{ y } \pi_{r+1} = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_{r+1}.$$

Consideremos la carta afín

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x} \left[\frac{v_1}{v_2}, \frac{v_3}{v_2^{r+1}} \right].$$

Si denotamos por

$$(v_1)_1 = \frac{v_1}{v_2}, \text{ y } (v_3)_{r+1} = \frac{v_3}{v_2^{r+1}}$$

a lo largo de esta carta afín el módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi_r)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1}, \frac{dv_2}{v_2}, d(v_3)_{r+1} \right\}. \quad (3.72)$$

Un razonamiento inductivo nos permite deducir que la relación que vincula a los elementos de (3.72) es:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{v_2^{r+1}} \frac{d(v_1)_1}{(v_1)_1} + \\ & + \left(\frac{a_1}{v_2^r} + \frac{a_2}{v_2^r} + (r+1)a_3(v_3)_{r+1} \right) + \\ & + \frac{dv_2}{v_2} + a_3 d(v_3)_{r+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por 2.7.7 (2.49) sabemos que en esta carta afín:

$$\Delta_{S_1} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^{r+1}}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.74)$$

Sea $(x_1)_{r+1} = (C_1)_{r+1} \cap E_{r+1}$. Por la Proposición 3.3.2:

$$\Delta_{(C_1)_{r+1}, (x_1)_r} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^{r+1}}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle (v_1)_1, (v_3)_{r+1} \rangle} \quad (3.75)$$

$$\Delta_{(C_3)_{r+1}} = \left\langle \frac{a_1}{v_2^{r+1}}, \frac{a_2}{v_2^r} \right\rangle \pmod{\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle}. \quad (3.76)$$

Obsérvese que en este caso $\left(\frac{a_2}{v_2^r}\right)$ es el transformado estricto del elemento a_2 en \mathcal{O}_{S_1} y que las explosiones en centros de dimensión 1 inducen la identidad en S_1 .

Denotaremos por k al número natural r ó $r+1$ según sea el caso para evitar tener que estar considerando por separado y reiteradamente los casos en que $\text{ord}_x a_1|_S = r$ y $\text{ord}_x a_1|_S > r$.

Si tras la cadena de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_k & \xrightarrow{e_k} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \\ S_k & & \dots & & S_1 & & S_0 = S \end{array}$$

para todo punto cerrado $z \in S_k \cap E_k$ se tiene que:

$$\text{ord}_z(\Delta_{S_k, z}) < r$$

entonces claramente por (3.62) y (3.63),

$$\text{Max} F_{S_k} < F_S(x).$$

Si por el contrario existe un punto $z \in S_k \cap E_k$ tal que

$$\text{ord}_z(\Delta_{S_k, z}) = r,$$

entonces existe un polinomio homogéneo de grado 1 en $\text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S, x})$ tal que

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S, x}) \rangle = \langle l' \rangle,$$

y por lo tanto el punto z es el único punto cerrado en $S_k \cap E_k$ con $\text{ord}_z(\Delta_{S_k, z}) = r$ y es racional sobre $\mathcal{O}_{S, x}$.

A continuación, argumentaremos de manera diferente, según el tipo de punto que sea x :

- Si x es un punto de primer tipo entonces

$$\langle \text{In}_x(\Delta_{S, x}) \rangle \subset \langle \text{In}_x(v_1) \rangle,$$

y por tanto

$$\langle \text{In}_x v_1 \rangle = \langle l \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S, x})$$

por lo que $z = (C_1)_k \cap E_k = (C_1)_k \cap (C_2)_k$ y z es un punto de cruceamiento. Sea

$$\text{ord}_z(\Delta_{(C_1)_k}) = s'_1.$$

Nótese que por el Lema 3.4.3 $s'_1 \leq s_1$. Sea $s' = \max\{s'_1, r\}$. Se tiene entonces que:

$$F_{S_1}(z) = (r, s', 1, 0) < F_S(x) = (r, s_1, 1, 1)$$

(véase (3.62)).

- Si x es un punto de segundo tipo entonces

$$\langle \text{In}(\Delta_{S,x}) \rangle \not\subset \langle \text{In}_x v_1 \rangle \subset \text{Gr}_x(\mathcal{O}_{S,x}).$$

En tal caso la curva $(C_1)_k$ es permisible en el punto $(C_1)_k \cap E_k$ y por lo tanto z es un punto sin cruzamiento. Por 3.3.2:

$$\Delta_{(C_2)_k,z} = \Delta_{S_k} |_{(C_2)_k}$$

por lo que z es el único punto de $(C_2)_k$ donde esta curva no es permisible, y además z es un punto de segundo tipo y por lo tanto:

$$F_{S_1}(z) = (r, r, 0, 0) = F_S(x) = (r, r, 0, 0).$$

(Véase (3.63)).

3.6 Demostración del Teorema 3.1.2.

Consideremos la explosión con centro una curva permisible $C \subset S$:

$$W_1 \longrightarrow W.$$

Tal y como hemos indicado en la sección 3.4, el transformado estricto de S , S_1 es naturalmente isomorfo a S . Sin embargo esta explosión induce una transformación en el jacobiano de S , hecho que describimos en la Proposición 3.4.1.

La Proposición 3.4.1 nos permite ignorar las componenets de altura 1 del ideal jacobiano de S siempre que sea necesario, lo que desde luego supone una simplificación a la hora de demostrar el Teorema 3.1.2. A lo largo de este sección adoptaremos como convenio ignorar las componenets de dimensión 1 de $V(\Delta_S)$.

En la sección 3.5 hemos definido una función semicontinua superiormente que hemos denotado por F_S (Definición 3.5.2), cuyo cometido es medir la *falta de permisibilidad* de S . En la Proposición 3.5.4 hemos estudiado el comportamiento de esta función por explosiones en centros permisibles.

3.6.1 Afirmación:

No existe una secuencia infinita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{e_{N+1}} & W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \\ \dots & \longrightarrow & (S_N, x_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S_1, x_1) & \longrightarrow & (S_0 = S, x_0 = x) \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in V(\Delta_{S_i})$ (S_i denota el transformado estricto de S_{i-1}) tal que:

i. cada punto x_i es sin cruzamiento y de segundo tipo;

ii. además:

$$F_{S_i}(x_i) = F_{S_0}(x_0).$$

Estrategia.

Para demostrar esta afirmación construiremos una curva formal, C , que contenga al punto $x = x_0$ y tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $(C)_i$ contenga al punto x_i (donde $(C)_i$ denota el transformado estricto de $(C)_{i-1}$).

La construcción de este curva formal nos obliga a trabajar en el anillo $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$. Para trasladar la información procedente del módulo de diferenciales con polos, $\omega(\pi)_x$, al anillo $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ utilizaremos el módulo de diferenciales separado, $\hat{\Omega}_{\mathcal{O}_{W,x}}$. En esta etapa de la demostración del Teorema 3.1.2 utilizaremos fuertemente algunos de los resultados que aparecen en [Ku].

3.6.2 Demostración de la afirmación 3.6.1.

Sea $x \in V(\Delta_S)$ un punto cerrado sin cruzamiento y de primer tipo. Supongamos que $\pi(x) = y \in Y$, y $m(y) = \langle \tau \rangle \subset \mathcal{O}_{Y,y}$. En $\mathcal{O}_{W,x}$ escogemos un sistema regular de parámetros conveniente:

$$\{v_1, v_2, v_3\} \tag{3.77}$$

de modo que

i. $\tau = v \cdot v_1^{\alpha_1}$ donde v es una unidad en $\mathcal{O}_{W,x}$ y $\alpha_1 > 0$.

ii. $\mathcal{I}(S)_x = \langle v_3 \rangle$.

Con esta notación sea:

$$m = m(x) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Desarrollaremos la demostración de la afirmación en diferentes etapas. Los módulos de diferenciales que consideremos siempre serán relativos a Y aunque no se señale explícitamente.

• **Etapas 1. Sobre los módulos de diferenciales $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}^1$ y $\Omega_{\mathcal{O}_{S,x}}^1$.**

El $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}^1$ está generado por los elementos

$$\{dv_1, dv_2, dv_3\}.$$

Recordemos que el rango genérico del $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}^1$ es 2. Existe por tanto un ideal de Fitting correspondiente a $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}^1$ que denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{O}_{W,x})$.

Razonando de manera similar sabemos que el $\mathcal{O}_{S,x}$ -módulo de diferenciales $\Omega_{\mathcal{O}_{S,x}}^1$ está generado por los elementos

$$\{dv_1, dv_2\}$$

y también sabemos que el rango genérico de este $\mathcal{O}_{S,x}$ -módulo es 1, por lo tanto denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{O}_{S,x})$ a su ideal de Fitting correspondiente.

• **Etapas 2. Sobre los módulos $\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{O}}_{W,x}}^1$ y $\tilde{\Omega}_{\hat{\mathcal{O}}_{S,x}}^1$.**

Consideremos el anillo local $\mathcal{O}_{W,x}$ y su completado con la topología m -ádica $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$. Por el Teorema de estructura de Cohen para anillos locales completos ([Co] o [Ma]) existe un homomorfismo sobreyectivo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{T}[\![t_1, t_2, t_3]\!] &\longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{W,x} \\ t_i &\longrightarrow v_i \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde \mathcal{T} es un anillo de valoración discreta con ideal maximal $p\mathcal{T}$, donde p es la característica del cuerpo residual $k_W(x)$.

Obsérvese que

$$\langle p - ut_1^{\alpha'} \rangle \subset \text{Ker}(\varphi),$$

donde $u \in \mathcal{T}[\![t_1, t_2, t_3]\!]$ es una unidad, y $\alpha' \in \mathbb{N}_{>0}$. Como

$$\dim(\mathcal{T}[\![t_1, t_2, t_3]\!] / \langle p - ut_1^{\alpha'} \rangle) = 3$$

necesariamente se tiene el isomorfismo:

$$\mathcal{T}([t_1, t_2, t_3]) / \langle p - ut_1^{\alpha'} \rangle \simeq \hat{\mathcal{O}}_{W,x}. \quad (3.79)$$

De manera natural se obtiene además el isomorfismo:

$$\mathcal{T}([t_1, t_2, t_3]) / \langle p - ut_1^{\alpha'}, t_3 \rangle \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,x}. \quad (3.80)$$

Para abreviar usaremos la notación:

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}([t_1, t_2, t_3]),$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}([t_1, t_2, t_3]) / \langle p - ut_1^{\alpha'} \rangle \simeq \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$$

y

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}([t_1, t_2, t_3]) / \langle p - ut_1^{\alpha'}, t_3 \rangle \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,x}$$

Dado un anillo \mathcal{C} designaremos por $\tilde{\Omega}_{\mathcal{C}}$ al álgebra diferencial universal finita de \mathcal{C} (1.2.5). Utilizando algunos de los resultados mencionados en el Capítulo 1, se tiene que:

- i. Por el Corolario 1.2.13 el álgebra diferencial $\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}}$ existe y además

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}} = \hat{\Omega}_{\mathcal{O}_{W,x}} = \Omega_{\mathcal{O}_{W,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \hat{\mathcal{O}}_{W,x},$$

y por la Proposición 1.2.4 la parte homogénea de grado 1 del álgebra diferencial $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}$, $\Omega_{\mathcal{O}_{W,x}}^1$ se identifica canónicamente con el $\mathcal{O}_{W,x}$ -módulo de diferenciales de Kähler de $\mathcal{O}_{W,x}$.

- ii. Por el Corolario 1.2.13 el álgebra diferencial $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}$ existe y además

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}} = \hat{\Omega}_{\mathcal{O}_{S,x}} = \Omega_{\mathcal{O}_{S,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{S,x}} \hat{\mathcal{O}}_{S,x},$$

y por la Proposición 1.2.4 la parte homogénea de grado 1 del álgebra diferencial $\Omega_{\mathcal{O}_{S,x}}$, $\Omega_{\mathcal{O}_{S,x}}^1$ se identifica canónicamente con el $\mathcal{O}_{S,x}$ -módulo de diferenciales de Kähler de $\mathcal{O}_{S,x}$.

- iii. Por la Proposición 1.2.14 y el Corolario 1.2.15 el módulo de diferenciales $\tilde{\Omega}_B^1$ existe y es libre de rango 3.

iv. Por el Corolario 1.2.10 para todo ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ existe una sucesión exacta:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{B}}^1/\mathcal{I} \tilde{\Omega}_{\mathcal{B}}^1 \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}^1 \longrightarrow 0. \quad (3.81)$$

Si denotamos por $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{R})$ al ideal de Fitting correspondiente a $\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}}^1$ entonces se tiene que

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{R}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{O}_{W,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{R}$$

y si denotamos por $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ al ideal de Fitting correspondiente a $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}^1$ entonces

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{O}_{S,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,x}} \mathcal{A}.$$

• **Etapla 3. Sobre los módulos $\tilde{\omega}(\pi)$ y $\tilde{\omega}(\pi|_S)$.**

Aún no hemos hecho uso de los módulo de diferenciales con polos $\omega(\pi)_x$, y $\omega(\pi|_S)_x$. Nuestro próximo propósito es utilizarlos para definir ciertos módulos sobre los anillos completos \mathcal{R} y \mathcal{A} . Definimos entonces:

$$\tilde{\omega}(\pi) = \omega(\pi)_x \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{R}, \quad (3.82)$$

y

$$\tilde{\omega}(\pi|_S) = \omega(\pi|_S)_x \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{A}. \quad (3.83)$$

Sean ahora $\tilde{\Delta}_W$ y $\tilde{\Delta}_S$ los ideales de Fitting, correspondientes a $\tilde{\omega}(\pi)$ y $\tilde{\omega}(\pi|_S)$, respectivamente. Entonces

$$\tilde{\Delta}_W = \mathcal{R},$$

y

$$\tilde{\Delta}_S = \Delta_{S,x} \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \mathcal{A}.$$

Si denotamos por $\mathcal{Q}(\mathcal{R})$ al cuerpo de cocientes de \mathcal{R} entonces:

$$\tilde{\omega}(\pi) = \tilde{\Omega}_{\mathcal{R}}^1 \left[\frac{dv_1}{v_1} \right] \subset \tilde{\Omega}_{\mathcal{R}}^1 \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{Q}(\mathcal{R}), \quad (3.84)$$

y si denotamos por $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ al cuerpo de cocientes de \mathcal{A} entonces:

$$\tilde{\omega}(\pi|_S) = \tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}^1 \left[\frac{dv_1}{v_1} \right] \subset \tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}^1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Q}(\mathcal{A}). \quad (3.85)$$

Nótese que por (3.84) $\tilde{\omega}(\pi)$ es un \mathcal{R} -módulo sin torsión, por lo que la ley de transformación por explosiones del ideal $\tilde{\Delta}_S$ es la misma que la del ideal Δ_S .

• **Etapla 4. Construcción de la curva C .**

Consideremos la secuencia de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{e_{N+1}} & W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W_0 = W \\ \dots & \longrightarrow & (S_N, x_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (S_1, x_1) & \longrightarrow & (S_0 = A, x_0 = x) \end{array}$$

con centros los puntos cerrados x_i . Recordemos que los puntos x_i son puntos sin cruzamiento y de segundo tipo en Δ_{S_i} (S_i el transformado estricto de S_{i-1}). Sea $R = \text{Spec}(\mathcal{R})$ y $A = \text{Spec}(\mathcal{A})$. La secuencia de explosiones descrita anteriormente induce una secuencia de explosiones en el completado:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R \\ \dots & \longrightarrow & (A_N, x_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (A_1, x_1) & \longrightarrow & (A_0 = A, x_0 = x) \end{array}$$

Y puesto que por hipótesis $\Delta_{S, x_N} \neq \langle 1 \rangle$, se tiene que

$$\tilde{\Delta}_{S_N, x_N} \neq \langle 1 \rangle.$$

Dado que todos los puntos de la secuencia $\{x_i\}$ son racionales sobre \mathcal{R} y nunca se encuentran en la intersección de dos divisores excepcionales existe una curva regular C en $\text{Spec}(\mathcal{R})$ tal que $x \in C$ y $x_i \in (C)_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $(C)_i$ denota el transformado estricto de $(C)_{i-1}$. En \mathcal{R} fijamos el sistema regular de parámetros:

$$\{t_1, w, t_3\}$$

de modo tal que

- $\tau = u' t_1^{\alpha_1}$, donde u' es una unidad en \mathcal{R} y $\alpha_1 > 0$.
- $\mathcal{I}(S)_x = \langle t_3 \rangle$,
- $\mathcal{I}(C)_x = \langle w, t_3 \rangle$.

En tal caso $\tilde{\Omega}_{\mathcal{R}}^1$ está generado por los elementos

$$\{dt_1, dw, dt_3\}. \quad (3.86)$$

Por la sucesión exacta de la Proposición 1.2.4, tomando $\mathcal{I} = \langle p - u't_1^{\alpha_1} \rangle$,

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{B}}/\mathcal{I} \tilde{\Omega}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0$$

existe una relación que vincula a los elementos que aparecen en (3.86):

$$Ddt_1 + Edw + Fdt_3 = 0. \quad (3.87)$$

Esta relación es no trivial puesto que

$$\langle D, E, F \rangle = \mathcal{D}(\mathcal{R}) = \mathcal{D}(\mathcal{O}_{W,x}) \neq 0.$$

Por (3.84) el módulo $\tilde{\omega}(\pi)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dt_1}{t_1}, dw, dt_3 \right\}. \quad (3.88)$$

La relación (3.87) induce una relación no trivial entre los elementos de (3.88):

$$Dt_1 \frac{dt_1}{t_1} + Edw + Fdt_3 = 0. \quad (3.89)$$

Dada una relación no nula que vincule a los elementos de (3.88) siempre podemos encontrar la relación generadora de todas las que vinculan a los elementos de (3.88) sacando factor común el máximo común divisor de los coeficientes. En este caso la relación generadora de todas las que vinculan a los elementos de (3.88) se obtiene de la relación (3.89) extrayendo factor común a los elementos Dt_1 , E , y F . Si denotamos por G a este factor común se obtiene que:

$$\frac{Dt_1}{G} \frac{dt_1}{t_1} + \frac{E}{G} dw + \frac{F}{G} dt_3 = 0. \quad (3.90)$$

es la generadora de todas las relaciones que vinculan a los elementos de (3.88). Obsérvese que puesto que $\tilde{\Delta}_{\mathcal{A}} \neq \mathcal{A}$,

$$\tilde{\Delta}_{\mathcal{A}} = \left\langle \frac{Dt_1}{G}, \frac{E}{G} \right\rangle \neq \mathcal{A}. \quad (3.91)$$

Ley de transformación por explosiones.

A continuación calcularemos explícitamente el valor del ideal

$$\tilde{\Delta}_{A_N, x_N},$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción que

$$\tilde{\Delta}_{A_N, x_N} = \left\langle \frac{Dt_1}{Gt_1^N}, \frac{E}{G} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{R_N, x_N}. \quad (3.92)$$

- $N = 1$. Consideremos la explosión con centro

$$x = x_0 = V(< t_1, w, t_3 >),$$

$$R_1 \longrightarrow R_0 = R.$$

Puesto que por hipótesis x es un punto sin cruzamiento de segundo tipo, para analizar el ideal $\tilde{\Delta}_{S_1, x_1}$ es suficiente analizar la carta:

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \left[\frac{w}{t_1}, \frac{t_3}{t_1} \right].$$

Sean $(w)_1 = \frac{w}{t_1}$ y $(t_3)_1 = \frac{t_3}{t_1}$. El punto x_1 es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$V(< t_1, (w)_1, (t_3)_1 >).$$

En esta carta el módulo $\tilde{\omega}(\pi_1)$ está generado por los elementos:

$$\left\{ \frac{dt_1}{t_1}, d(w)_1, d(t_3)_1 \right\} \quad (3.93)$$

y la relación (3.90) da lugar a la relación:

$$\left(\frac{Dt_1}{G} + \frac{E}{G}(w)_1 t_1 + \frac{F}{G}(t_3)_1 t_1 \right) \frac{dt_1}{t_1} + \frac{E}{G} t_1 dw_1 + \frac{F}{G} t_1 d(t_3)_1 = 0. \quad (3.94)$$

Extrayendo factor común t_1 en esta última relación obtenemos que

$$\left(\frac{Dt_1}{Gt_1} + \frac{E}{G}(w)_1 + \frac{F}{G}(t_3)_1 \right) \frac{dt_1}{t_1} + \frac{E}{G} dw_1 + \frac{F}{G} d(t_3)_1 = 0. \quad (3.95)$$

y por lo tanto

$$\tilde{\Delta}_{A_1, x_1} = \left\langle \frac{Dt_1}{Gt_1}, \frac{E}{G} \right\rangle (\text{mod } < (t_3)_1 >). \quad (3.96)$$

- Supongamos que por hipótesis de inducción:

- Tenemos la secuencia de explosiones en los puntos $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$:

$$\begin{array}{ccccccc} R_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R \\ (A_N, x_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (A_1, x_1) & \longrightarrow & (A_0 = A, x_0 = x) \end{array}$$

- Analizamos la carta

$$\mathcal{R} \left[\frac{w}{t_1^N}, \frac{t_3}{t_1^N} \right].$$

- $(w)_N = \frac{w}{t_1^N}$ y $(t_3)_N = \frac{t_3}{t_1^N}$.
- El punto cerrado x_N es el correspondiente al ideal maximal

$$\langle t_1, (w)_N, (t_3)_N \rangle.$$

- El \mathcal{O}_{R_N} -módulo $\tilde{\omega}(\pi_N)$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dt_1}{t_1}, d(w)_N, d(t_3)_N \right\} \quad (3.97)$$

y hay una relación que los vincula:

$$\left(\frac{Dt_1}{Gt_1^N} + N \left(\frac{E}{G}(w)_N + \frac{F}{G}(t_3)_N \right) \right) \frac{dt_1}{t_1} + \frac{E}{G}d(w)_N + \frac{F}{G}d(t_3)_N = 0 \quad (3.98)$$

Consideremos la explosión con centro el punto x_N . Puesto que por hipótesis x_{N+1} es un punto sin cruzamiento y de primer tipo, para analizar el ideal $\tilde{\Delta}_{A_{N+1}, x_{N+1}}$ nos basta considerar la carta

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \left[\frac{w}{t_1^{N+1}}, \frac{t_3}{t_1^{N+1}} \right].$$

Sean $(w)_{N+1} = \frac{w}{t_1^{N+1}}$ y $(t_3)_{N+1} = \frac{t_3}{t_1^{N+1}}$. El punto x_{N+1} es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$\langle t_1, (w)_{N+1}, (t_3)_{N+1} \rangle.$$

En esta carta el $\mathcal{O}_{R_{N+1}}$ -módulo $\tilde{\omega}(\pi_{N+1})$ está generado por los elementos

$$\left\{ \frac{dt_1}{t_1}, d(w)_{N+1}, d(t_3)_{N+1} \right\} \quad (3.99)$$

La relación (3.98) da lugar a la relación:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{Dt_1}{Gt_1^N} + N \left(\frac{E}{G}(w)_N + \frac{F}{G}(t_3)_N \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E}{G}(w)_{N+1}t_1 + \frac{F}{G}(t_3)_{N+1}t_1 \right] \frac{dt_1}{t_1} + \\ & \quad + \frac{E}{G}t_1(d)(w)_{N+1} + \frac{F}{G}t_1d(t_3)_N = 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Extrayendo factor común t_1 en la relación (3.100) se obtiene que la relación generadora de todas las que vinculan a los elementos de (3.99) es:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{Dt_1}{Gt_1^{N+1}} + N \left(\frac{E}{G}(w)_{N+1} + \frac{F}{G}(t_3)_{N+1} \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{E}{G}(w)_{N+1} + \frac{F}{G}(t_3)_{N+1} \right] \frac{dt_1}{t_1} + \\ & \quad + \frac{E}{G}d(w)_{N+1} + \frac{F}{G}d(t_3)_N = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Y como consecuencia obtenemos que

$$\tilde{\Delta}_{A_{N+1}, x_{N+1}} = \left\langle \frac{Dt_1}{Gt_1^{N+1}}, \frac{E}{G} \right\rangle \pmod{\langle (t_3)_{N+1} \rangle}.$$

Puesto que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\Delta}_{A_N, x_N} \neq \langle 1 \rangle$$

necesariamente

$$\frac{Dt_1}{G} \pmod{\langle t_3 \rangle} \in \langle w \rangle \pmod{\langle t_3 \rangle}.$$

Puesto que t_1 es coprimo con w esto significa que

$$D \pmod{\langle t_3 \rangle} \in \langle w \rangle \pmod{\langle t_3 \rangle}. \quad (3.102)$$

• **Etapla 5. Conclusión.**

3.6.3 Sea $\mathcal{C} = \mathcal{R}/\langle w, t_3 \rangle$ el anillo de la curva C en el punto x . Utilizando la sucesión exacta (3.81) y tomando $\mathcal{I} = \langle p - ut_1^{\alpha'}, w, t_3 \rangle$ se tiene que:

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \tilde{\Omega}_B^1/\mathcal{I} \tilde{\Omega}_B^1 \longrightarrow \tilde{\Omega}_C^1 \longrightarrow 0. \quad (3.103)$$

Recordemos que $\tilde{\Omega}_B$ es un \mathcal{B} -módulo libre de rango 3. Usando la matriz:

$$\begin{pmatrix} D & E & F \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deducimos que el ideal de Fitting asociado a $\tilde{\Omega}_C^1$ viene dado por

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{C}) = \langle D \rangle \pmod{\langle w, t_3 \rangle} = 0 \pmod{\langle w, t_3 \rangle}, \quad (3.104)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el resultado (3.102) obtenido en la Etapa 4. Podemos afirmar por tanto que el \mathcal{C} -módulo $\tilde{\Omega}_C^1$ tiene rango genérico 1.

3.6.4 Nos proponemos ahora calcular el rango genérico de $\tilde{\Omega}_C^1$ de otro modo.

Consideremos el cuerpo $k(p) = \mathcal{T}/p\mathcal{T}$. Obsérvese que el anillo $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{T}} k(p)$ es un $k(p)$ -espacio vectorial finitamente generado. Por el Teorema 1.4.8 el anillo \mathcal{C} es un \mathcal{T} -módulo finito. Sea $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$ el cuerpo de cocientes de anillo \mathcal{T} , y dado un elemento $g \in \mathcal{R}$ sea \bar{g} su clase en el anillo \mathcal{C} . Con esta notación consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}[[\bar{t}_1]]/\langle \bar{t}_1^{\alpha_1}\bar{u} - \bar{p} \rangle & \longrightarrow & \mathcal{T}[[\bar{t}_1]]/\langle \bar{t}_1^{\alpha_1}\bar{u} - \bar{p} \rangle \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{Q}(\mathcal{T}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{T}) \end{array}$$

i.e.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{Q}(\mathcal{T}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{Q}(\mathcal{T}) \end{array}$$

Obsérvese que $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{Q}(\mathcal{T})$ es una extensión finita y separable de $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$, por lo que

$$\Omega_{\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{Q}(\mathcal{T})/\mathcal{Q}(\mathcal{T})}^1 = 0.$$

Deducimos de aquí que el rango genérico del \mathcal{C} -módulo $\Omega_{\mathcal{C}}^1$ es cero. Por la Proposición 1.2.8 se tiene que $\tilde{\Omega}_{\mathcal{C}}^1$ es un cociente de $\Omega_{\mathcal{C}}^1$, de donde deducimos que el rango genérico del \mathcal{C} -módulo $\tilde{\Omega}_{\mathcal{C}}^1$ es también cero, por lo que no puede ser 1 como habíamos concluido en 3.6.3. \square

Capítulo 4

Exponentes idealísticos y superficies aritméticas.

4.1 Introducción y notación.

4.1.1 Consideremos un morfismo casi-liso $\pi : W \longrightarrow Y$, y $X \subset W$ una hipersuperficie plana sobre Y .

Para cada $x \in X$, sea f_x una ecuación local de X en $\mathcal{O}_{W,x}$. Dado un número natural k definimos el subconjunto cerrado de X :

$$\text{Sing}(X, k) = \{x \in X : \text{ord}_x f_x \geq k\},$$

donde $\text{ord}_x f_x$ denota el orden en el anillo local regular $\mathcal{O}_{W,x}$.

Sea

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\},$$

De este modo, b es el máximo de las multiplicidades de X en sus puntos. Obsérvese que en este caso,

$$\text{Sing}(X, b) = \{x \in X : \text{ord}_x f_x \geq b\} = \{x \in X : \text{ord}_x f_x = b\}.$$

Sea $x \in \text{Sing}(X, b)$ un punto cerrado y consideremos su imagen, $\pi(x) = y \in Y$. Como $\pi : W \longrightarrow Y$ es un morfismo casi-liso, la fibra $\pi^{-1}(y)$ sobre el punto y es una unión de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales:

$$E_y = \pi^{-1}(y) = \cup_{j=1}^{m(y)} H_j$$

donde, para $j = 1, \dots, m(y)$, H_j denota una hipersuperficie regular.

Sea $f_x|_{H_j}$ la restricción de f_x a la hipersuperficie H_j . En general se tiene que

$$\text{ord}_x f_x|_{H_j} \geq b,$$

donde ahora $\text{ord}_x f_x|_{H_j}$ denota el orden de la clase de f_x en el anillo local regular $\mathcal{O}_{H_j, x}$.

Definición 4.1.2 *Fijado b como en 4.1.1 diremos que X es maximalmente transversal al morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ si para todo $x \in \text{Sing}(X, b)$ y para todo $H_i \in E_{\pi(x)}$ con $x \in H_i$,*

$$\text{ord}_x f_x|_{H_i} = b.$$

Dado $x \in \text{Sing}(X, b)$, y $H \in E_{\pi(x)}$ diremos que X es maximalmente transversal a la hipersuperficie H , si para todo punto cerrado $x' \in \text{Sing}(X, b) \cap H$,

$$\text{ord}_{x'} f_{x'}|_H = b.$$

Si X es regular hablaremos simplemente de transversalidad.

El objetivo de este capítulo, es probar el siguiente teorema:

Teorema 4.1.3 *Sea $W \xrightarrow{\pi} Y$ un esquema casi liso de dimensión 3, y sea $X \subset W$ una hipersuperficie plana y reducida sobre Y . Para cada $x \in X$ sea $f_x \in \mathcal{O}_{W, x}$ una ecuación local de X y sea*

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}.$$

Entonces existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \xrightarrow{e_N} & \dots & \xrightarrow{e_2} & W_1 & \xrightarrow{e_1} & W = W_0 \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ X_N & & \dots & & X_1 & & X = X_0 \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset \text{Sing}(X_i, b)$ (X_i denota el transformado estricto de X_{i-1}), de modo tal que el morfismo

$$\pi_N = \pi \circ e_1 \circ \dots \circ e_N : W_N \rightarrow Y$$

es casi-liso y, o bien

$$\text{Sing}(X_N, b) = \emptyset,$$

o bien X_N es maximalmente transversal al morfismo π_N .

Presentamos a continuación un pequeño esquema de lo que será la demostración del Teorema 4.1.3 y que desarrollaremos a lo largo de las distintas secciones del presente capítulo. Siempre que se pueda, supondremos que $W \rightarrow Y$ es un esquema casi-liso de dimensión n , y $X \subset W$ una hipersuperficie, y sólo impondremos la condición $n = 3$ cuando sea absolutamente necesario.

4.1.4 En primer lugar probaremos que, tras una secuencia finita de explosiones en centros permisibles, podemos suponer que el transformado estricto de la hipersuperficie X es genéricamente lisa sobre Y (i.e. si \mathcal{F} denota el cuerpo de cocientes de Y entonces la localización $W_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{F})$ es un morfismo liso). Para ello supondremos que la dimensión de W es 3. Este resultado se recoge en la Proposición 4.2.1

En estas condiciones, el cerrado $\text{Sing}(X, b)$ es un subesquema vertical sobre Y , i.e. existe un número finito de puntos cerrados

$$Y_b = \{y_1, \dots, y_r\} \subset Y,$$

tales que

$$\pi(\text{Sing}(X, b)) = Y_b.$$

Para cada punto $y_i \in Y_b$ consideramos el conjunto

$$E_{y_i} = \pi^{-1}(y_i) = \bigcup_{j=1}^{k_i} H_{ij}.$$

Recordemos que $\{H_{ij}\}_{i=1, \dots, r; j=1, \dots, k_i}$ es un conjunto de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales puesto que el morfismo $\pi : W \rightarrow Y$ es casi-liso.

Sea $x \in \text{Sing}(X, b)$. Para $i = 1, \dots, r$, y $j = 1, \dots, k_i$ tendremos que

$$\text{ord}_x f_x|_{H_{ij}} \geq b.$$

A continuación observamos que aunque con la explosión en un centro permisible

$$e : W_1 \rightarrow W,$$

agregamos nuevas hipersuperficies como componentes a las fibras del morfismo $\pi_1 = \pi \circ e$, el transformado estricto de X es de manera automática maximalmente transversal a ellas (Lema 4.2.4).

Al final de la sección 4.2 concluimos que para demostrar el Teorema 4.1.3, es suficiente con *separar* el conjunto cerrado

$$\text{Sing}(X, b)$$

del conjunto de hipersuperficies

$$\pi^{-1}(Y_b) = \cup_{i,j} H_{i,j},$$

mediante explosiones en centros adecuadamente escogidos. De hecho, como sólo hay un número finito de hipersuperficies en $\pi^{-1}(Y_b)$, nos basta demostrar el Teorema 4.1.3 en el caso en que sólo hay una. En lo que resta de capítulo, denotaremos a esta hipersuperficie por G .

Obsérvese que separar el cerrado $\text{Sing}(X, b)$ de la hipersuperficie G tiene un sentido preciso a través de la noción de *resolución de exponente idealístico* introducida por Hironaka.

4.1.5 Nuestro siguiente propósito es describir el contacto entre las hipersuperficies X y G . A tal efecto, pretendemos repetir en el contexto aritmético las técnicas introducidas por Hironaka en el caso de variedades sobre cuerpos. Para ello, nos proponemos introducir el análogo al exponente idealístico de Hironaka.

Fijemos un punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b) \cap G$. Consideremos el completado, $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, del anillo local $\mathcal{O}_{W,x}$. Por el Teorema de estructura de Cohen para anillos completos ([Co], ó [Ma]), se tiene que $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$ es isomorfo a un cociente de

$$\mathcal{T}[\![v_1, \dots, v_n]\!],$$

donde \mathcal{T} es un anillo de valoración discreta con $\mathbb{Z}_{<p>} \subset \mathcal{T}$ para algún primo $p \in \mathbb{Z}$, y $<p\mathcal{T}>$ es el ideal maximal de \mathcal{T} . Denotaremos a este cociente por \mathcal{R} .

4.1.6 Sean f_x y $z \in \mathcal{R}$ ecuaciones de X y G , respectivamente. Si dispusiéramos en este contexto del Teorema de Preparación de Weierstrass ([ZS2]), podríamos intentar expresar f_x como un polinomio en la variable z con coeficientes en un anillo de series formales en otras variables. Una expresión de este tipo para f_x es el punto de partida para la definición de exponente idealístico de Hironaka.

En nuestro caso el anillo local \mathcal{R} no contiene ningún cuerpo. Por lo tanto no estamos en condiciones de aplicar un teorema de esta índole. En consecuencia nos vemos obligados a desarrollar una serie de nuevas estructuras en el anillo \mathcal{R} , que nos permitan obtener un resultado lo más parecido posible a las conclusiones del Teorema de Preparación de Weierstrass. Con este propósito, desarrollamos en la sección 4.3 la siguiente maquinaria:

- Fijamos en \mathcal{R} lo que llamaremos *un conjunto de representantes*. Diremos que un subconjunto \mathcal{S} de \mathcal{R} es un conjunto de representantes de \mathcal{R} si verifica las siguientes condiciones:

- i. Para cada elemento $a \in k(x)$ existe un único elemento $s \in \mathcal{S}$ tal que

$$s \pmod{m(x)} = a.$$

(Recordemos que $k(x)$ denota el cuerpo residual del anillo \mathcal{R}).

- ii. $0 \in \mathcal{S}$.

Obsérvese que:

- Todos los elementos de \mathcal{S} salvo el 0 son unidades en \mathcal{R} .
- \mathcal{S} sólo es un conjunto de representantes y por lo tanto no es cerrado por operaciones algebraicas elementales como la suma o el producto. Esta será una de las dificultades que sólo aparecen en el contexto aritmético, y que tendremos que superar.
- En \mathcal{R} trabajaremos, según nos interese, con diferentes sistemas de coordenadas. La definición de exponente idealístico nos lleva a privilegiar una de las coordenadas sobre las demás. El subesquema determinado por la la coordenada privilegiada, que denotaremos por z , será G .

En el Lema 4.3.3 probaremos que fijado un sistema regular de parámetros F , todo elemento de \mathcal{R} se puede escribir de manera única como una suma formal de monomios en F con coeficientes en el conjunto de representantes \mathcal{S} . Si bien este hecho es conocido, lo incluimos aquí para que la presentación de este capítulo sea autocontenida.

La utilidad de este resultado estriba en que los elementos de \mathcal{R} *casi* se pueden interpretar como elementos de un anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo. La dificultad esencial consiste en que

estas expresiones formales no son compatibles con operaciones algebraicas elementales o cambios de coordenadas como ocurre en el caso de cuerpos.

4.1.7 En \mathcal{R} fijaremos un sistema regular de parámetros, F , y un conjunto de representantes, \mathcal{S} . Referido a estos datos, podemos considerar una expresión formal para f_x . En la expresión para f_x aparece, jugando un papel destacado, la variable z .

Para describir el contacto local entre las hipersuperficies X y G en un punto cerrado, x , introducimos el *Ideal de Coeficientes* referido a un sistema regular de parámetros F , y a ecuaciones locales de X y G (Definición 4.3.7). Denotaremos a este ideal por \mathcal{K}_x^F . El objeto $(\mathcal{K}_x^F, b!)$ será nuestro exponente idealístico.

Obsérvese que este ideal se construye partiendo de una expresión formal de f_x respecto a un conjunto de representantes \mathcal{S} y a un sistema regular de parámetros fijados. De este modo el ideal \mathcal{K}_x^F depende, efectivamente, de la elección de F . Nuestra siguiente meta es extraer del ideal de coeficientes información que sea independiente de las coordenadas escogidas para construirlo (i.e. definir *invariantes*).

4.1.8 Con la Definición 4.4.2 presentamos el que será nuestro primer invariante: el Índice del ideal \mathcal{K}_x^F respecto de un subesquema cerrado regular Z :

$$i_Z(X, G) = \frac{\text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F}{b!} \in \mathbb{Q}.$$

Este número racional mide la intensidad del contacto entre X y G . Jugará un papel decisivo en el proceso de resolución de nuestro exponente idealístico.

En la Proposición 4.4.3 probaremos que, bajo ciertas hipótesis, el índice es independiente del sistema regular de parámetros escogido para la construcción del ideal de coeficientes.

A continuación, en la sección 4.5, introducimos la noción de *cambio de coordenadas vinculado con un sistema de coordenadas dado* (Definición 4.5.2). Esto nos lleva a la definición de nuestro segundo invariante. En efecto, en la Proposición 4.5.4 probamos que bajo este tipo de cambio de coordenadas la *Parte inicial del Ideal de Coeficientes* en un punto cerrado x es independiente del sistema regular de parámetros escogido.

La Sección 4.6 está dedicada al estudio de las componentes de altura 1 del Ideal de Coeficientes. En la Definición 4.6.2 introducimos el conjunto

$$\Sigma_x = \{H_1, \dots, H_m\}$$

como un conjunto de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales que contienen al punto x . En secciones posteriores, precisaremos la importancia del conjunto Σ_x , pues nos referiremos a él como el conjunto de divisores excepcionales procedentes de anteriores explosiones y que contienen al punto x .

En la Definición 4.6.2 introducimos el concepto de *sistema regular de parámetros compatible con Σ_x* y probamos, en la Proposición 4.6.3, que si utilizamos cambios de coordenadas compatibles con Σ_x , el orden del Ideal de Coeficientes en los primos de altura 1 definidos por elementos de Σ_x no cambia.

4.1.9 Finalmente, en la Sección 4.7 desarrollamos la demostración del Teorema 4.1.3, en la que distinguiremos 3 etapas:

• **Etapas 1.**

En esta primera fase de la demostración del Teorema 4.1.3 justificamos el paso al completado.

En la Proposición 4.7.1 probaremos que la intersección $\text{Sing}(X, b) \cap G$ es vacía localmente en x si y sólo si

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_x^F, b!) = \emptyset.$$

donde

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_x^F, b!) = \{Z \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{W,x}) : \text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F \geq b!\}$$

(F es cualquier sistema regular de parámetros que contiene a z , y z es una ecuación local de G en $\mathcal{O}_{W,x}$).

Se dice que una cadena de explosiones

$$R_N \longrightarrow \dots \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 = \text{Spec}(\mathcal{R})$$

es una resolución del exponente idealístico $(\mathcal{K}_x^F, b!)$, si para todo $x' \in R_N$,

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_{x'}^{F'}, b!) = \emptyset,$$

donde $F_{x'}$ es cualquier sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{R, x'}$ que contenga una ecuación del transformado estricto de G en R_N (véase 4.7.2). De este modo el Teorema 4.1.3 se reduce a un teorema de resolución del exponente idealístico $(\mathcal{K}_x^F, b!)$.

• **Etapas 2.**

Estudiamos el comportamiento de los ideales \mathcal{K}_x^F por explosiones en centros permisibles. En el Lema 4.7.4 comprobamos que si escogemos un sistema regular de parámetros adecuado, F , el ideal \mathcal{K}_x^F sigue una determinada *ley de transformación por explosiones*.

En 4.7.5 introducimos el concepto de *Descomposición Monomial del Ideal de Coeficientes* referida a un sistema regular de parámetros. En el Lema 4.7.6, probamos que, tras la explosión en un centro permisible, el orden de la parte no monomial del Ideal de Coeficientes en los puntos excepcionales de interés no aumenta. Esto no permitirá reducir el problema de resolución del exponente idealístico al caso en que el ideal de coeficientes es un monomio.

Para el desarrollo de esta etapa son cruciales los resultados probados en las secciones 4.5 y 4.6.

• **Etapas 3.**

En esta etapa demostramos la Proposición 4.7.8. Esta proposición nos garantiza la existencia de una secuencia finita de explosiones en centros permisibles, de modo que el ideal de coeficientes, referido a un sistema regular de parámetros adecuado, es un producto de ideales primos de altura 1. A partir de aquí la demostración del Teorema 4.1.3, se reduce a un argumento puramente combinatorio (véase 4.7.9).

En esta parte de la demostración del Teorema 4.1.3, nos vemos obligados a argumentar en el caso en que la dimensión de W es 3.

4.1.10 Notación. A lo largo del presente capítulo, G denotará una hipersuperficie regular, como en 4.1.4.

Sea $x \in X$ un punto cerrado y sea $\mathcal{O}_{W,x}$ su anillo local correspondiente, entonces:

- Denotaremos por $m(x)$ (ó simplemente m si no hay riesgo de confusión) al ideal maximal correspondiente al punto x , y por $k(x)$ al cuerpo residual $\mathcal{O}_{W,x}/m(x)$.
- $\hat{\mathcal{O}}_{W,x} = \mathcal{R}$ denotará el completado del anillo $\mathcal{O}_{W,x}$ con la topología $m(x)$ -ádica.
- f_x y z serán ecuaciones locales de X y G , respectivamente, tanto en $\mathcal{O}_{W,x}$, como en \mathcal{R} . Para evitar notaciones excesivamente complicadas en ocasiones escribiremos f en lugar de f_x .
- \mathcal{S} denotará un conjunto de representantes en \mathcal{R} como en 4.1.6.
- Dado $r \in \mathcal{R}$, \bar{r} denotará la clase de r en $\mathcal{R}/\langle z \rangle$.

4.2 Reducción al caso de superficies genéricamente lisas.

Sea W esquema de dimensión 3, $\pi : W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso, y $X \subset Y$ una superficie reducida y plana sobre Y . Probaremos en esta sección dos resultados fundamentales: la Proposición 4.2.1, y el Lema 4.2.4.

La Proposición 4.2.1, nos permite reducir la demostración del Teorema 4.1.3 al caso en que X es una superficie genéricamente lisa.

El Lema 4.2.4 nos garantiza tras la explosión en un centro permisible, $Z \subset \text{Sing}(X, b)$, el transformado estricto de X , X_1 , verifica la siguiente propiedad con respecto al divisor excepcional E : si $\text{Sing}(X_1, b) \cap E \neq \emptyset$ entonces X_1 es maximalmente transversal a E .

Proposición 4.2.1 *Sea W un esquema de dimensión 3, y $W \rightarrow Y$ un morfismo casi-liso. Consideremos $X \subset W$ una superficie reducida y plana sobre Y . Existe una secuencia finita de explosiones*

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \end{array}$$

con centros permisibles $C_i \subset \text{Sing}(X_i, b)$, (X_i el transformado estricto de X_{i-1}), de modo tal que X_N es genéricamente lisa sobre Y .

Demostración: Sea \mathcal{F} el cuerpo de cocientes de Y , que recordemos es un cuerpo de característica cero.

Consideremos el diagrama de cambio de base,

$$\begin{array}{ccccc} W_{\mathcal{F}} & = & W \times_Y \mathcal{F} & \xrightarrow{h} & W \\ & & \pi_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{F} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

inducido por la localización de \mathcal{O}_Y en \mathcal{F} .

Si X es regular, entonces el morfismo

$$X_{\mathcal{F}} \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{F})$$

es liso, luego X es genéricamente lisa sobre Y . Por tanto en este caso no hay nada que probar.

Supongamos que X no es regular. Consideremos la curva $X_{\mathcal{F}} = h^{-1}(X) \subset W_{\mathcal{F}}$. Obsérvese que $X_{\mathcal{F}}$ es una curva sobre un cuerpo. Existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} (W_{\mathcal{F}})_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (W_{\mathcal{F}})_1 & \longrightarrow & (W_{\mathcal{F}})_0 = W_{\mathcal{F}} \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ (X_{\mathcal{F}})_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_{\mathcal{F}})_1 & \longrightarrow & (X_{\mathcal{F}})_0 = X_{\mathcal{F}} \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $y_i \in \text{Sing}((X_{\mathcal{F}})_i)$, ($(X_{\mathcal{F}})_i$ el transformado estricto de $(X_{\mathcal{F}})_{i-1}$), de modo que $(X_{\mathcal{F}})_N$ es una curva regular.

Nótese que esta secuencia de explosiones en puntos, induce una secuencia de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ X_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 = X \end{array}$$

cuyos centros son curvas irreducibles y planas sobre Y , que denotamos por $T_i \subset \text{Sing}(X_i)$, (donde X_i , el transformado estricto de X_{i-1}). Si denotamos por

$$h_i : (W_{\mathcal{F}})_i \longrightarrow W_i$$

al morfismo inducido por h , se tiene que $h^{-1}(T_i)$ es el punto y_i definido en la primera secuencia de explosiones.

Sin embargo, nos gustaría preservar la casi-lisitud del medio ambiente W_N , y no podemos asegurar, en principio, que las curvas T_i sean permisibles en el sentido de la casi-lisitud.

Para salvar este obstáculo utilizaremos la Proposición 4.5 que aparece en [V3], y que ya hemos enunciado en otras ocasiones a lo largo de esta memoria por ejemplo en la sección 3.1 del capítulo 3).

De este modo, para cada elección del centro de explosión $y_i \in (W_{\mathcal{F}})_i$, y para cada curva inducida $T_i = h^{-1}(y_i)$ consideramos, si es necesario, una secuencia de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_{i_k} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_{i_1} & \longrightarrow & W_{i_0} = W_i \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ T_{i_k} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_{i_1} & \longrightarrow & T_{i_0} = T_i \end{array}$$

con centros en puntos cerrados incluidos en $V(\Delta_{T_{i_j}})$ (T_{i_j} el transformado estricto de $T_{i_{j-1}}$) de modo que el transformado estricto de T_i en W_{i_k} , T_{i_k} , es una curva permisible.

Esta secuencia de explosiones en puntos, no tiene ningún efecto sobre los esquemas $(W_{\mathcal{F}})_i$, por lo que se concluye también la demostración de la Proposición 4.2.1. \square

Observación 4.2.2 Por la Proposición 4.2.1, podemos suponer que $X \subset W$ es una superficie genéricamente lisa, inmersa en un esquema casi-liso. Por lo tanto existen un número finito de puntos cerrados

$$Y_b = \{Q_1, \dots, Q_r\} \subset Y$$

tales que

$$\pi(\text{Sing}(X, b)) = Y_b.$$

Puesto que el morfismo

$$\pi : W \longrightarrow Y$$

es casi-liso, el conjunto $\pi^{-1}(Y_b)$ es una unión de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales. En consecuencia para cada $Q_i \in Y_b$ se tiene

$$E_{Q_i} = \pi^{-1}(Q_i) = \cup_{j=1}^{k_i} H_{i,j},$$

donde $\{H_{i,j}\}_{i=1,\dots,r; j=1,\dots,i_k}$ es un conjunto de hipersuperficies regulares con cruzamientos normales.

Nuestro próximo objetivo es probar el Lema 4.2.4, para el que usaremos el siguiente resultado técnico:

Lema 4.2.3 *Sea \mathcal{A} un anillo local regular, m su ideal maximal y $p \subset \mathcal{A}$ un ideal primo regular. Sean $Gr_m(\mathcal{A})$, y $Gr_p(\mathcal{A})$ los anillos graduados correspondientes a m y a p . Consideremos las aplicaciones naturales:*

$$In_m : \mathcal{A} \longrightarrow Gr_m(\mathcal{A})$$

y

$$In_p : \mathcal{A} \longrightarrow Gr_p(\mathcal{A}),$$

que a cada elemento de \mathcal{A} le asocian su forma inicial en m o p , respectivamente. Entonces:

i. *El morfismo natural de álgebras graduadas*

$$\beta : \mathcal{A}/m \otimes_{\mathcal{A}} Gr_p(\mathcal{A}) \longrightarrow Gr_m(\mathcal{A})$$

es inyectivo.

ii. *Consideremos el morfismo de paso al cociente:*

$$\alpha : Gr_p(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/m \otimes_{\mathcal{A}} Gr_p(\mathcal{A}).$$

Si un elemento $g \in \mathcal{A}$ verifica que

$$ord_p(g) = ord_m(g)$$

entonces

$$\beta(\alpha(In_p(g))) = In_m(g).$$

Demostración: Como p es un ideal primo regular en \mathcal{A} , podemos escoger un sistema regular de parámetros en \mathcal{A} , $\{x_1, \dots, x_n\}$, tal que

$$p = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$$

con $1 \leq r \leq n$.

Entonces,

$$\text{Gr}_m(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}/m[Y_1, \dots, Y_n],$$

y

$$\text{Gr}_p(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}/p[Z_1, \dots, Z_r],$$

y existe un morfismo natural de álgebras graduadas

$$\gamma : \mathcal{A}/p[Z_1, \dots, Z_r] \longrightarrow \mathcal{A}/m[Y_1, \dots, Y_n],$$

con núcleo

$$m(\text{Gr}_p(\mathcal{A})),$$

por lo que el morfismo

$$\beta : \mathcal{A}/m \otimes_{\mathcal{A}} \text{Gr}_p(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Gr}_m(\mathcal{A})$$

es inyectivo.

Si consideramos la aplicación natural

$$\alpha : \text{Gr}_p(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/m \otimes_{\mathcal{A}} \text{Gr}_p(\mathcal{A})$$

se tiene que

$$\beta \circ \alpha = \gamma.$$

Sea ahora $g \in \mathcal{A}$ un elemento tal que

$$\text{ord}_m(g) = \text{ord}_p(g).$$

En tal caso

$$\gamma(\text{In}_p(g)) \neq 0 \text{ y } \gamma(g) = \text{In}_m(g).$$

Como consecuencia

$$\beta(\alpha(\text{In}_p(g))) = \text{In}_m(g). \quad \square$$

Lema 4.2.4 Sea $\pi : W \longrightarrow Y$ un esquema casi-liso de dimensión n y sea $X \subset W$ una hipersuperficie. Para cada punto cerrado $x \in X$ sea f_x una ecuación local de X en $\mathcal{O}_{W,x}$, y sea

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}.$$

Consideremos

$$e : W_1 \longrightarrow W$$

la explosión de W en un centro permisible $Z \subset \text{Sing}(X, b) \subset W$. Sea X_1 el transformado estricto de X y E el divisor excepcional. Entonces, para todo punto $x' \in E \cap X_1$, se tiene que

$$\text{ord}_{x'}(X_1|_E) \leq b,$$

donde $X_1|_E = X_1 \cap E$.

Demostración: Sea $x \in W$ un punto cerrado tal que

$$\text{ord}_x f_x = b.$$

En $\mathcal{O}_{W,x}$, escogemos un sistema regular de parámetros

$$F = \{y_1, \dots, y_n\}$$

de modo tal que en $\mathcal{O}_{W,x}$

$$\mathcal{I}(Z)_x = \langle y_1, \dots, y_r \rangle,$$

donde $1 \leq r \leq n$.

Sea m el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_{W,x}$. Consideremos la explosión con centro Z ,

$$e : W_1 \longrightarrow W.$$

Analizaremos a continuación la fibra del morfismo e sobre el punto cerrado $x \in Z$.

- Si $r = n$, i.e., si Z es un punto cerrado.

Entonces

$$E = e^{-1}(Z) = \text{Proj}(Gr_m(\mathcal{O}_{W,x})).$$

En tal caso, se tiene que

$$Gr_m(\mathcal{O}_{W,x}) \simeq k(x)[Y_1, \dots, Y_n],$$

ésto es, $Gr_m(\mathcal{O}_{W,x})$ es isomorfo a un anillo de polinomios con coeficientes en el cuerpo residual del punto x . Ahora es suficiente observar que en este anillo, la imagen del elemento f_x por la aplicación natural

$$\text{In}_{m(x)} : \mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow Gr_m(\mathcal{O}_{W,x}),$$

es un polinomio homogéneo de grado b .

- Si $r < n$, i.e. si Z no es un punto cerrado.

Entonces

$$E = e^{-1}(Z) = \text{Proj}(Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x})).$$

Se tiene que

$$Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x}) \simeq \mathcal{O}_{Z,x}[Y_1, \dots, Y_r],$$

ésto es, $Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x})$ es isomorfo a un anillo de polinomios en las variables Y_1, \dots, Y_r , con coeficientes en el anillo local regular

$$\mathcal{O}_{W,x} / \langle y_1, \dots, y_r \rangle = \mathcal{O}_{Z,x}.$$

Como $Z \subset \text{Sing}(X, b)$ la aplicación:

$$\text{In}_Z : \mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x}),$$

lleva el elemento f_x a $\text{In}_Z(f_x)$, un polinomio homogéneo de grado b en las variables Y_1, \dots, Y_r , con coeficientes en el anillo $\mathcal{O}_{Z,x}$.

Para concluir la demostración del lema, es suficiente comprobar que para todo punto $x' \in e^{-1}(x)$, $\text{ord}_{x'}((f_x)_1) \leq b$, donde $(f_x)_1$ denota el transformado estricto de f_x . Obsérvese ahora que

$$\text{i. } e^{-1}(x) = \text{Proj}(\mathcal{O}_{W,x}/m(x) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x})),$$

ii. Por el Lema 4.2.3 se tiene una inclusión natural

$$\beta : \mathcal{O}_{W,x}/m(x) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} Gr_Z(\mathcal{O}_{W,x}) \hookrightarrow Gr_m(\mathcal{O}_{W,x}).$$

iii. Si consideramos los morfismo naturales de álgebras graduadas:

$$\gamma : \text{Gr}_Z(\mathcal{O}_{W,x}) \longrightarrow \text{Gr}_m(\mathcal{O}_{W,x})$$

y

$$\alpha : \text{Gr}_Z(\mathcal{O}_{W,x}) \longrightarrow \mathcal{O}_{W,x}/m(x) \otimes_{\mathcal{O}_{W,x}} \text{Gr}_Z(\mathcal{O}_{W,x})$$

entonces

$$\beta \circ \alpha = \gamma.$$

Puesto que $\text{ord}_x f_x = \text{ord}_Z f_x$ (ya que $Z \subset \text{Sing}(X, b)$) por el Lema 4.2.3 se tiene que

$$\beta(\alpha(\text{In}_Z(f_x))) = \text{In}_m(f_x).$$

Como β es un morfismo inyectivo $\alpha(\text{In}_Z(f_x))$ es un polinomio homogéneo de grado menor o igual que b . \square

Observación 4.2.5 Por el Lema 4.2.4 y la Observación 4.2.2, la demostración del Teorema 4.1.3 se reduce a probar que, dada una hipersuperficie regular $G \subset W$, con $\text{Sing}(X, b) \cap G \neq \emptyset$, existe una secuencia finita de explosiones

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & & & \cup & & \cup \\ (X_N, G_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_1, G_1) & \longrightarrow & (X_0 = X, G_0 = G) \end{array}$$

en centros permisibles $C_i \subset (\text{Sing}(X_i, b) \cap G_i)$, (donde X_i denota el transformado estricto de X_{i-1} , y G_i el de G_{i-1}), de modo que

$$\text{Sing}(X_N, b) \cap G_N = \emptyset.$$

En este punto subrayamos un vez más (y aclararemos más adelante) la analogía existente entre nuestro problema y las nociones de exponente idealístico y de resolución de exponente idealístico.

4.3 El Ideal de Coeficientes.

4.3.1 Sea $W \xrightarrow{\pi} Y$, un morfismo casi-liso. Sea $X \subset W$ una hipersuperficie reducida. Sean $x \in \text{Sing}(X, b)$ un punto cerrado y $\hat{\mathcal{O}}_{W,x} = \mathcal{R}$, el completado del anillo local $\mathcal{O}_{W,x}$.

Nuestro objetivo es introducir un concepto que nos sea útil para ilustrar el contacto en x , entre X y G . Como ya hemos mencionado en la sección 4.1, esta idea fue desarrollada por Hironaka con la noción de exponente idealístico.

Con este propósito definiremos el Ideal de Coeficientes referido a un sistema regular de parámetros (Definición 4.3.7). Si bien, este ideal puede depender del sistema de coordenadas escogido para su construcción, podremos extraer de él la información que necesitamos para probar el Teorema 4.1.3. Éste es el programa a desarrollar a lo largo de próximas secciones.

4.3.2 Fijemos una familia de elementos en \mathcal{R} ,

$$\{r_1, \dots, r_m\},$$

con $1 \leq m \leq n$, que se pueda extender a un sistema regular de parámetros

$$\{r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n\}.$$

Para cada número natural $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto:

$$\mathcal{H}_k^m = \{(j_1, \dots, j_m, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^m j_i \geq k\}.$$

Con esta notación, para cada número natural k definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} & \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k = \\ & \{\alpha \in \mathcal{R} : \alpha = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{H}_k^n} b_{j_1, \dots, j_n} r_1^{j_1} \cdots r_n^{j_n}; \ b_{j_1, \dots, j_n} \in S\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & [r_1, \dots, r_m]_S^k = \\ & \{\alpha \in \mathcal{R} : \alpha = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{H}_k^m} b_{j_1, \dots, j_m} r_1^{j_1} \cdots r_m^{j_m}; \ b_{j_1, \dots, j_m} \in S\} \end{aligned}$$

Si $k = 1$ usaremos $\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S$ y $[r_1, \dots, r_m]_S$ en lugar de $\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^1$ y $[r_1, \dots, r_m]_S^1$, respectivamente.

Lema 4.3.3 *Fijado un conjunto de representantes S y un sistema regular de parámetros, $\{t_1, \dots, t_n\}$, todo elemento $h \in \mathcal{R}$ se puede expresar de manera única como elemento del conjunto $[t_1, \dots, t_n]_S^0$.*

Demostración: En primer lugar probaremos que todo elemento $h \in \mathcal{R}$ es un elemento de

$$[t_1, \dots, t_n]_{\mathcal{S}}^0.$$

Denotaremos por m el ideal maximal del anillo \mathcal{R} . Sea

$$\text{ord}_x(h) = k.$$

Consideremos el anillo graduado $\text{Gr}_m(\mathcal{R})$, y la aplicación

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\text{In}_m} \text{Gr}_m(\mathcal{R}).$$

Sea

$$g_k = \sum_{i_1, \dots, i_n} s_{i_1, \dots, i_n} M_{i_1, \dots, i_n}^k,$$

un elemento de \mathcal{R} , tal que $\text{In}_m(g_k) = \text{In}_m(h)$, y de modo tal que $s_i \in \mathcal{S}$, y $M_i^k = t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}$, con $i_1 + \dots + i_n = k$ (recordemos que $\text{ord}_x h = k$). Entonces

$$h_1 = h - g_k \in m^{k+1}.$$

Si $h_1 \neq 0$ definimos $k_1 = \text{ord}_x(h_1)$. Entonces $k_1 \geq k + 1$. Razonando del mismo modo, ahora con h_1 , existe $g_{k_1} \in \mathcal{R}$ tal que

$$\text{In}_m(h_1) = \text{In}_m(g_{k_1}),$$

y

$$g_{k_1} = \sum_{i_1, \dots, i_n} s_i M_{i_1, \dots, i_n}^{k_1},$$

donde $s_i \in \mathcal{S}$, y $M_i^{k_1} = t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}$, con $i_1 + \dots + i_n = k_1$. En tal caso,

$$h_2 = h_1 - g_{k_1} \in m^{k_1+1}.$$

Iterando el proceso, puesto que \mathcal{R} es completo, se tiene finalmente que

$$h = g_k + g_{k_1} + g_{k_2} + \dots,$$

con $k < k_1 < k_2 < \dots$, y g_{k_i} una suma de monomios en $\{t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$, de grado k_i y con coeficientes en \mathcal{S} , para $i \in \mathbb{N}$.

Probaremos ahora la unicidad. Sea $k(m) = \mathcal{R}/m$. Puesto que los elementos

$$\{\text{In}_{m(x)}(t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}) : s \in S, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Gr}_m(\mathcal{R})$$

son linealmente independientes sobre $k(x)$, los elementos $st_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}$, con $s \in S$, se escriben de manera única como elemento del conjunto

$$[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0.$$

Consideremos el conjunto formado por los monomios

$$\mathcal{M} = \{t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n} : m_i \in \mathbb{N}\}.$$

En \mathcal{M} definimos un orden total: diremos que

$$t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n} \geq t_1^{m'_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m'_n}$$

si $\sum_{i=1}^n m_i > \sum_{i=1}^n m'_i$ ó, $\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m'_i$ y $(m_1, \dots, m_n) \geq_{lex} (m'_1, \dots, m'_n)$ donde \geq_{lex} denota el orden lexicográfico en \mathbb{N}^n .

Bajo estas condiciones, podemos denotar cada monomio

$$t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n} \in \mathcal{M}$$

como

$$M_{i,d} = t_1^{m_1} \cdot \dots \cdot t_n^{m_n}$$

si $\sum_{i=1}^n m_i = d$, y si además existen exactamente $i - 1$ monomios de orden d menores que él en \mathcal{M} . Tomaremos $M_{0,0} = 1$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos también el número natural a_k como el número de monomios en \mathcal{M} con grado k .

Sea ahora $g \in \mathcal{R}$, y consideremos

$$g = \sum_{i,d} s_{i,d} M_{i,d}$$

su expresión como elemento del conjunto $[t_1, \dots, t_{n-1}, t_n]_S^0$. Podemos ordenar la expresión de g agrupando los monomios que tienen el mismo orden en m . Así si $k = \text{ord}_x g$:

$$g = \sum_i s_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots$$

Sea

$$g = \sum_i s'_{i,d} M_{i,d}$$

otra expresión para g como elemento del conjunto $\langle t_1, \dots, t_n \rangle_S$. De nuevo podemos agrupar los sumandos de esta expresión para g , según los órdenes de los monomios:

$$g = \sum_i s'_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots$$

La igualdad:

$$\begin{aligned} \sum_i s_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots = \\ = \sum_i s'_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots, \end{aligned}$$

nos dice que

$$\text{In}_{m(x)} \left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} \right) = \text{In}_{m(x)} \left(\sum_i s'_{i,k} M_{i,k} \right)$$

por lo que

$$s_{i,k} = s'_{i,k},$$

para $i = 1, \dots, a_k$. Para concluir, es suficiente aplicar un razonamiento inductivo. \square

Lema 4.3.4 *Para cada número natural k , el conjunto $\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$ (4.3.2), es un ideal en \mathcal{R} , y además,*

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k = \langle r_1, \dots, r_m \rangle^k,$$

donde el término de la derecha indica la potencia de orden k del ideal

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle.$$

Demostración: Obviamente,

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k \subset \langle r_1, \dots, r_m \rangle^k,$$

por lo que para probar el lema es suficiente demostrar que:

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k \supset \langle r_1, \dots, r_m \rangle^k.$$

Consideremos el conjunto de monomios

$$\mathcal{M} = \{r_1^{l_1} \cdot \dots \cdot r_n^{l_n} : l_i \in N\}.$$

En \mathcal{M} definimos un orden total como en la demostración del Lema 4.3.3.

Recordemos que, bajo estas condiciones, denotábamos cada monomio

$$r_1^{l_1} \cdot \dots \cdot r_n^{l_n} \in \mathcal{M}$$

como

$$M_{i,d} = r_1^{l_1} \cdot \dots \cdot r_n^{l_n}$$

si $\sum_{i=1}^n l_i = d$, y existen exactamente $i-1$ monomios de orden d menores que él en \mathcal{M} . Tomaremos $M_{0,0} = 1$.

Para cada $k \in N$, definíamos a_k como el número de monomios en \mathcal{M} con grado k .

Por el Lema 4.3.3 cada elemento $h \in \mathcal{R}$, se escribe de manera única como elemento del conjunto $[r_1, \dots, r_n]_{\mathcal{S}}^0$. Ésta expresión para el elemento h se puede reescribir como

$$h = \sum_{i,d} s_{i,d} M_{i,d}$$

entendiendo que $s_{i,d} = 0$ si el monomio $M_{i,d}$ no aparece en la expresión para h (recordamos aquí que todos los elementos de \mathcal{S} son unidades en \mathcal{R} salvo uno, que convenimos en tomar como 0 (4.1.6)).

Para la demostración de este lema, adoptaremos esta notación para la escritura de los elementos de \mathcal{R} . Desarrollaremos la demostración en varios pasos:

- i. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$. Recordemos que \mathcal{S} es sólo un conjunto de representantes, por lo que no tiene por qué ser cerrado por operaciones algebraicas. Entonces por el Lema 4.3.3

$$\alpha + \beta = \sum_{i,d} \gamma_{i,d} M_{i,d}$$

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i,d} \gamma'_{i,d} M_{i,d},$$

con $\gamma_{i,d}, \gamma'_{i,d} \in \mathcal{S}$, y $M_{i,d} \in \mathcal{M}$.

ii. Sean ahora $M \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k \cap \mathcal{M}$ y $M' \in \mathcal{M}$ un monomio cualquiera, como en (ii). Entonces se tiene que:

(a) Sea $h \in \mathcal{R}$, entonces claramente:

$$M \cdot h \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k.$$

(b) Si $g \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$, entonces:

$$M' \cdot g \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k.$$

iii. Sean ahora $g, g' \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$:

$$g = \sum_{i,d} s_{i,d} M_{i,d}, \quad g' = \sum_{i,d} s'_{i,d} M'_{i,d},$$

con $s_i, s'_i \in S$ y suponemos que $s_i = s'_i = 0$ si $M_{i,d} \notin \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$.

Veamos que $g + g' \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$. En primer lugar escribimos las expresiones para g y g' según el grado de los monomios:

$$g = \sum_i s_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots$$

$$g' = \sum_i s'_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots$$

Entonces

$$\begin{aligned} g + g' &= \\ &= \sum_i s_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s'_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots = \\ &= (s_{1,k} + s'_{1,k}) M_{1,k} + (s_{2,k} + s'_{2,k}) M_{2,k} + \dots + (s_{a_k,k} + s'_{a_k,k}) M_{a_k,k} + \\ &\quad + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots \end{aligned}$$

Por el apartado (i), se tiene que

$$\begin{aligned} &(s_{1,k} + s'_{1,k}) M_{1,k} + (s_{2,k} + s'_{2,k}) M_{2,k} + \dots + (s_{a_k,k} + s'_{a_k,k}) M_{a_k,k} + \\ &\quad + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i,d} \gamma_{i,d}^1 M_{i,d} \right) M_{1,k} + \left(\sum_{i,d} \gamma_{i,d}^2 M_{i,d} \right) M_{2,k} + \dots + \left(\sum_{i,d} \gamma_{i,d}^{a_k} M_{i,d} \right) M_{a_k,k} + \\
&\quad + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots = \\
&\quad = \gamma_{0,0}^1 M_{1,k} + \gamma_{0,0}^2 M_{2,k} + \dots + \gamma_{0,0}^{l_k} M_{l_k,k} + \\
&\quad \left(\sum_{i>0,d>0} \gamma_{i,d}^1 M_{i,d} \right) M_{1,k} + \left(\sum_{i>0,d>0} \gamma_{i,d}^2 M_{i,d} \right) M_{2,k} + \dots + \\
&\quad + \left(\sum_{i>0,d>0} \gamma_{i,d}^{a_k} M_{i,d} \right) M_{a_k,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots
\end{aligned}$$

Por definición

$$\gamma_{0,0}^1 M_{1,k} + \gamma_{0,0}^2 M_{2,k} + \dots + \gamma_{0,0}^{l_k} M_{l_k,k} \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k,$$

así que para probar que $g + g' \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$, basta probar que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i>0,d} \gamma_{i,d}^1 M_{i,d} \right) M_{1,k} + \left(\sum_{i>0,d} \gamma_{i,d}^2 M_{i,d} \right) M_{2,k} + \dots + \left(\sum_{i>0,d} \gamma_{i,d}^{a_k} M_{i,d} \right) M_{a_k,k} + \\
&\quad + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \sum_i s'_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k.
\end{aligned}$$

Ahora, en esta expresión estamos sumando elementos que están en $\langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$, con orden mayor que k , luego la conclusión se sigue de un argumento inductivo.

iv. Sean $g \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$, y $h \in \mathcal{R}$, comprobaremos a continuación que

$$g \cdot h \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k.$$

Como $g \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$, podemos escribir g como

$$g = \sum_{i,d} s_{i,d} M_{i,d},$$

con $s_{i,d} \in \mathcal{S}$ y $s_{i,d} = 0$ si $M_{i,d} \notin \langle r_1, \dots, r_m \rangle^k$. Por el Lema 4.3.3, si suponemos que $\text{ord}_x h = l$, podemos expresar h como

$$h = \sum_{i,d \geq l} s'_{i,d} M_{i,d},$$

con $s_{i,d} \in \mathcal{S}$, y $M_{i,d} \in \mathcal{M}$. Consideremos ahora el producto:

$$\begin{aligned} g \cdot h &= \left(\sum_{i,d} s_{i,d} M_{i,d} \right) \cdot \left(\sum_{i,d} s'_{i,d} M_{i,d} \right) = \\ &= \left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} + \sum_i s_{i,k+1} M_{i,k+1} + \dots \right) \cdot \left(\sum_i s'_{i,l} M_{i,l} + \sum_i s'_{i,l+1} M_{i,l+1} + \dots \right) = \\ &= \left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} \right) \cdot \left(\sum_i s'_{i,l} M_{i,l} \right) + \\ &+ \left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} \right) \cdot \left(\sum_{i,d>l} s'_{i,d} M_{i,d} \right) + \left(\sum_{i,d>k} s_{i,d} M_{i,d} \right) \cdot \left(\sum_i s'_{i,l} M_{i,l} \right) \end{aligned}$$

Por los apartados (ii) y (iii), es claro que:

$$\left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} \right) \cdot \left(\sum_i s'_{i,l} M_{i,l} \right) \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k,$$

$$\left(\sum_i s_{i,k} M_{i,k} \right) \cdot \left(\sum_{i,d>l} s'_{i,d} M_{i,d} \right) \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$$

y que

$$\left(\sum_{i,d>k} s_{i,d} M_{i,d} \right) \cdot \left(\sum_i s'_{i,l} M_{i,l} \right) \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k,$$

por lo que por el apartado (iii) se tiene que

$$gh \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k.$$

Hemos probado por tanto que

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$$

es un ideal.

Observamos a continuación que para todo $s \in \mathcal{S}$, tiene que

$$sr_1^{i_1} \cdot \dots \cdot r_m^{i_m} \in \langle r_1, \dots, r_m \rangle_{\mathcal{S}}^k$$

siempre que

$$i_1 + \dots + i_m \geq k,$$

por lo que se tiene la inclusión

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle^k \subset \langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k. \square$$

Lema 4.3.5 Sea $\{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} y S un conjunto de representantes como en 4.1.6. Sea

$$Z = V(\langle z, t_1, \dots, t_r \rangle) \subset \text{Spec}(\mathcal{R}), \quad (r \leq n-1),$$

sea $f \in \mathcal{R}$:

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{k-1} z^{k-1} + c_k z^k + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

donde $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$ y sea k un número natural. Entonces se tiene que

$$\text{ord}_Z f \geq k \text{ si y sólo si } c_i \in [t_1, \dots, t_r]_S^{k-i}$$

para $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Demostración: Si $c_i \in [t_1, \dots, t_r]_S^{k-i}$, para $i = 0, 1, \dots, k-1$, entonces de manera inmediata

$$f \in \langle z, t_1, \dots, t_r \rangle_S^k.$$

Supongamos ahora que $\text{ord}_Z f = k$. Consideremos la expresión única de f :

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{k-1} z^{k-1} + c_k z^k + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

con $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$. Entonces por el Lema 4.3.4,

$$f \in \langle z, t_1, \dots, t_r \rangle^k = \langle z, t_1, \dots, t_r \rangle_S^k$$

por lo que

$$c_i z^i \in \langle z, t_1, \dots, t_r \rangle_S^k,$$

y por lo tanto

$$c_i \in \langle t_1, \dots, t_r \rangle_S^{k-i}$$

para $i = 0, 1, \dots, k-1$. De hecho por el Lema 4.3.3 se tiene que

$$c_i \in [t_1, \dots, t_r]_S^{k-i}. \quad \square$$

4.3.6 A partir de ahora fijaremos:

- El número natural

$$b = \max\{\text{ord}_x f_x : x \in X\}.$$

- Un punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b)$.
- Un conjunto de representantes $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$.
- Una ecuación local de X en $\mathcal{O}_{W,x} \subset \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, f_x y una ecuación local de G , z . Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos f en lugar de f_x .
- Tras la explosión en un centro permisible $Z \subset \text{Sing}(X, b)$, con $x \in Z$, utilizaremos como ecuaciones locales de los transformados estrictos de X y G , los transformados estrictos de las ecuaciones locales anteriormente escogidas.

Dado un sistema regular de parámetros supondremos siempre que contiene a z o algún transformado estricto del mismo según corresponda.

Definición 4.3.7 Sean $\{z, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} . Consideremos

$$f_x = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{b-1} z^{b-1} + c_b z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

con $c_i \in [y_1, \dots, y_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0$, la expresión única de f_x como elemento del conjunto $[z, y_1, \dots, y_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0$. Bajo estas condiciones definimos el Ideal de Coeficientes:

$$\mathcal{K}_x^F = \langle c_0^{\frac{b!}{b}}, c_1^{\frac{b!}{b-1}}, \dots, c_{b-1}^{\frac{b!}{1}} \rangle \text{ mod } (\langle z \rangle) = \langle (\bar{c}_i^{\frac{b!}{b-i}})_{i=0,1,\dots,b-1} \rangle \subset \mathcal{R} / \langle z \rangle,$$

donde \bar{c}_i denota la clase de c_i en el anillo $\mathcal{R} / \langle z \rangle$.

Observación 4.3.8 Por el Lema 4.3.5, fijado un sistema regular de parámetros $\{z, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ y para todo cerrado regular

$$Z = V(\langle z, y_1, \dots, y_r \rangle) \subset \text{Spec}(\mathcal{R} / \langle z \rangle) \subset \text{Spec}(\mathcal{R}), \quad 1 \leq r \leq n-1,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F \geq b! &\iff \text{ord}_Z c_i \geq b-i, \text{ para } c_i = 0, 1, \dots, b-1 \iff \\ &\iff c_i \in [y_1, \dots, y_r]_{\mathcal{S}}^{b-i}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, b-1 \iff \text{ord}_Z f_x \geq b. \end{aligned}$$

El ideal de coeficientes depende del sistema regular de parámetros que usemos para construirlo. Ilustraremos este hecho en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3.9

Sean $W = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x, y, z]/\langle p - xz \rangle)$, $Y = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $y \in Y$, un punto cerrado con $m(y) = \langle p \rangle$, $p \neq 2, 3$. Claramente W es un esquema casi-liso vía el morfismo natural:

$$\pi : W \longrightarrow Y.$$

Para evitar una notación excesivamente recargada, para todo elemento $a \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ denotaremos también por a a su clase en el anillo

$$\mathbb{Z}[x, y, z]/\langle p - xz \rangle$$

entendiendo que lo que se quiere decir es $a \pmod{\langle p - xz \rangle}$. Sea $X \subset W$ la hipersuperficie

$$\mathcal{I}(X) = \langle x^3 + yz + z^3 \rangle,$$

y sea $G \subset W$ la hipersuperficie definida por el ideal $\langle z \rangle$.

Consideremos $x \in X \cap G$ el punto cerrado con ideal maximal:

$$m(x) = \langle x, y, z \rangle.$$

Obsérvese que $\text{ord}_x(X) = 2$.

En $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$, fijaremos el conjunto de representantes:

$$S = \{0, 1, \dots, p-1\} \subset \mathbb{Z}.$$

Consideremos el sistema regular de parámetros $F = \{x, y, z\}$, se tiene que

$$\mathcal{K}_x^F = \langle x^3, y^2 \rangle \pmod{\langle z \rangle}.$$

Consideremos ahora el sistema regular de parámetros

$$F' = \{x + z = t, y, z\},$$

de modo que:

$$\begin{aligned} f &= (t - z)^3 + yz + z^3 = \\ &= t^3 + z(y - 3t^2) + z^2 3t. \end{aligned}$$

En este caso, obtenemos que

$$\mathcal{K}_x^{F'} = \langle t^3, (3t^2 - y)^2 \rangle \pmod{\langle z \rangle} = \langle t^3, y^2 - 6t^2 y \rangle \pmod{\langle z \rangle}.$$

Obviamente, $\mathcal{K}_x^F \neq \mathcal{K}_x^{F'}$, pues si denotamos por \bar{y} a la clase de y módulo el ideal $\langle z \rangle$, entonces $\bar{y}^2 \in \mathcal{K}_x^F$ mientras que $\bar{y}^2 \notin \mathcal{K}_x^{F'}$.

4.4 El Índice asociado al Ideal de Coeficientes.

4.4.1 En la sección 4.3 hemos definido el Ideal de Coeficientes referido a un sistema regular de parámetros, y a ecuaciones locales prefijadas de X y G en $\mathcal{O}_{W,x}$ (4.3.7).

En principio, este ideal no es un invariante pues depende de las coordenadas escogidas en $\mathcal{O}_{W,x}$ (véase el Ejemplo 4.3.9). El objetivo de esta sección es presentar el primer invariante que podemos extraer del exponente idealístico (\mathcal{K}_x^F): el índice con respecto a un cerrado $Z \subset G$ regular,

$$i_Z(X, G) = \frac{\text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F}{b!} \in \mathbb{Q}.$$

El resultado fundamental de esta sección es la Proposición 4.4.3, donde probamos que, bajo ciertas condiciones, este número racional es efectivamente un invariante.

Definición 4.4.2 Sea F un sistema regular de parámetros:

$$F = \{z, y_1, \dots, y_{n-1}\},$$

de modo que

$$i. G = V(< z >), \text{ y}$$

$$ii. Z = V(< z, y_1, \dots, y_r >) \text{ con } 1 \leq r \leq n-1.$$

Para la ecuación local de X , $f \in \mathcal{R}$, le asociamos su expresión (única) como elemento del conjunto $[z, y_1, \dots, y_{n-1}]_S^0$:

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{b-1} z^{b-1} + c_b z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

con $c_i \in [y_1, \dots, y_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$. Consideremos el ideal de coeficientes:

$$\mathcal{K}_x^F = \langle (\bar{c}_i^{\frac{b!}{b-i}})_{i=0,1,\dots,b-1} \rangle.$$

En estas condiciones definimos el número racional

$$i_Z(X, G) = \frac{\text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F}{b!} \in \frac{1}{b!} \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Proposición 4.4.3 *Supongamos que el número racional $i_Z(X, G)$ es mayor o igual que 1. Entonces $i_Z(X, G)$ es independiente del sistema regular de parámetros escogido en \mathcal{R} .*

Demostración: Sean

$$F = \{z, y_1, \dots, y_{n-1}\}$$

y

$$F' = \{z', y'_1, \dots, y'_{n-1}\},$$

dos sistemas regulares de parámetros en \mathcal{R} de modo que

$$G = V(< z >) = V(< z' >),$$

y además

$$Z = V(< z, y_1, \dots, y_r >) = V(< z', y'_1, \dots, y'_r >) \subset \text{Spec}(\mathcal{R}).$$

Obsérvese que $Z \subset \text{Sing}(X, b) \cap G$. Consideremos las dos expresiones de f con respecto a los conjuntos

$$[z, y_1, \dots, y_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0 \text{ y } [z', y'_1, \dots, y'_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0$$

que serán, respectivamente,:

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{b-1} z^{b-1} + c_b z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

$$f = c'_0 + c'_1 z' + c'_2 (z')^2 + \dots + c'_{b-1} (z')^{b-1} + c'_b (z')^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c'_i (z')^i,$$

con $c_i \in [y_1, \dots, y_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0$, y $c'_i \in [y'_1, \dots, y'_{n-1}]_{\mathcal{S}}^0$. Consideremos también los ideales de coeficientes

$$\mathcal{K}_x^F = \langle (\bar{c}_i^{\frac{b!}{b-i}})_{i=0,1,\dots,b-1} \rangle,$$

y

$$\mathcal{K}_x^{F'} = \langle ((\bar{c}'_i)^{\frac{b!}{b-i}})_{i=0,1,\dots,b-1} \rangle,$$

respecto a F y F' respectivamente; y finalmente los índices:

$$i_Z(X, G) = \frac{\text{ord}_Y(\mathcal{K}_x^F)}{b!},$$

e

$$i'_Z(X, G) = \frac{\text{ord}_Y(\mathcal{K}_x^{F'})}{b!}$$

Sean $c = i_Z(X, G)b!$, y $c' = i'_Z(X, G)b!$.

Antes de entrar de lleno en la demostración, daremos una idea previa de la estrategia que vamos a seguir:

Si $c \neq c'$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left[k \frac{c - b!}{b!} \right] \neq \left[k \frac{c' - b!}{b!} \right],$$

donde dado un número racional r , $[r]$ denota su parte entera.

Aprovecharemos este hecho del siguiente modo: consideraremos el anillo $\mathcal{V} = \mathcal{R}[[v]]$, y una secuencia de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} V_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{V}) = V_0 \\ T_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T_0 = T \end{array}$$

con centros

$$T_0 = V(< z, y_1, \dots, y_r, v >),$$

$$T_1 = V(< \frac{z}{v}, \frac{y_1}{v}, \dots, \frac{y_r}{v}, v >),$$

$$\vdots$$

$$T_N = V(< \frac{z}{v^N}, \frac{y_1}{v^N}, \dots, \frac{y_r}{v^N}, v >),$$

y con N tan grande como sea necesario.

Definimos la secuencia de puntos cerrados:

$$x_i = V\left(< \frac{z}{v^i}, \frac{y_1}{v^i}, \dots, \frac{y_r}{v^i}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v >\right).$$

Consideremos el cerrado

$$P = P_0 = V(< z, y_1, \dots, y_{n-1} >) =$$

$$= V(< z', y'_1, \dots, y'_{n-1} >) \subset V.$$

Definimos inductivamente P_i como el transformado estricto de P_{i-1} en la secuencia de explosiones anteriormente definida, y denotamos por E_i al divisor excepcional. Entonces es claro que

$$x_i = P_i \cap E_i,$$

y que por lo tanto

$$\begin{aligned} x_i &= V\left(< \frac{z}{v^i}, \frac{y_1}{v^i}, \dots, \frac{y_r}{v^i}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v >\right) = \\ &= V\left(< \frac{z'}{v^i}, \frac{y'_1}{v^i}, \dots, \frac{y'_r}{v^i}, y'_{r+1}, \dots, y'_{n-1}, v >\right). \end{aligned}$$

Escogiendo sistemas de coordenadas adecuados en los puntos x_i ,

$$F_i = \left\{ \frac{z}{v^i}, \frac{y_1}{v^i}, \dots, \frac{y_r}{v^i}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v \right\}$$

se tiene que

$$\mathcal{K}_{x_i}^{F_i} = v^{i(c-b!)} \mathcal{K}_x^F,$$

en cambio, si escogemos las coordenadas

$$F'_i = \left\{ \frac{z'}{v^i}, \frac{y'_1}{v^i}, \dots, \frac{y'_r}{v^i}, y'_{r+1}, \dots, y'_{n-1}, v \right\},$$

se tiene que

$$\mathcal{K}_{x_i}^{F'_i} = v^{i(c'-b!)} \mathcal{K}_x^{F'}.$$

Por el Lema 4.3.5,

$$\text{ord}_Z f \geq b \text{ si y sólo si } \text{ord}_Z \mathcal{K}_x^F \geq b!$$

si nos referimos al sistema regular de parámetros F o bien

$$\text{ord}_Z f \geq b \text{ si y sólo si } \text{ord}_Z \mathcal{K}_x^{F'} \geq b!$$

si nos referimos al sistema regular de parámetros F' .

Para concluir, basta observar que si tomamos N de modo tal que

$$\left[N \frac{c-b!}{b!} \right] \neq \left[N \frac{c'-b!}{b!} \right],$$

podremos “explotar un número distinto de veces con centro”

$$Q = V(< \frac{z}{v^N}, v >),$$

según usemos la información que nos da el ideal \mathcal{K}_x^F , o el ideal $\mathcal{K}_x^{F'}$, pues según el caso, este centro estará o no incluido en el lugar equimúltiple de orden b del transformado estricto de f . Esto conduce a un absurdo que proviene de suponer $c \neq c'$.

Comenzamos ahora la demostración de la Proposición 4.4.3. Supongamos que $c \neq c'$. En tal caso sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c' > c$. Definimos ahora una secuencia de números naturales (M_i) del siguiente modo:

$$M_i = \min\{k \in N : k(c - b!) \geq ib!\}$$

$$M'_i = \min\{k \in N : k(c' - b!) \geq ib!\}$$

Sea:

$$L = \min\{i : M_i \neq M'_i\}$$

Dado que $c \neq c'$ para algún índice i se tendrá que $M_i \neq M'_i$ y por lo tanto siempre es posible definir el número natural L . Como $c' > c$, se tiene que $M'_L < M_L$. Sea

$$N = M'_L \quad (4.1)$$

Definimos a continuación el anillo $\mathcal{R}[[v]] = \mathcal{V}$, y sean $V = \text{Spec}(\mathcal{V})$ y $R = \text{Spec}(\mathcal{R})$. Consideramos la secuencia de explosiones:

$$V_0 = V \longleftarrow V_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow V_N$$

con centros $T_i \subset V_i$, definida de manera inductiva como describimos a continuación:

• En V_0 definimos:

- i. $x_0 = x$,
- ii. $G_0 = G = V(< z >) = V(< z' >)$,
- iii. $Z_0 = Z = V(< z, y_1, \dots, y_r >) = V(< z', y'_1, \dots, y'_r >)$,
- iv. la hipersuperficie $E_0 = V(< v >)$
- v. el cerrado $T_0 = Z_0 \cap E_0$,

- vi. $\mathcal{K}_{x_0}^F$ el ideal de coeficientes de $f_0 = f$ referido al sistema regular de parámetros $F \cup \{v\}$. Denotaremos por F_0 al conjunto $F \cup \{v\}$.
- vii. $\mathcal{K}_{x_0}^{F'}$ el ideal de coeficientes de $f_0 = f$, ahora referido a al sistema regular de parámetros $F' \cup \{v\}$. Denotaremos por F'_0 al conjunto $F' \cup \{v\}$.

• Para $j = 1, \dots, N$ definimos

- i. $V_j \longrightarrow V_{j-1}$ la explosión de V_{j-1} con centro T_{j-1} ,
- ii. $G_j = V(< \frac{z}{v^j} >) = V(< \frac{z'}{v^j} >)$,
- iii. el transformado estricto del cerrado Z_{j-1} , Z_j :

$$Z_j = V(< \frac{z}{v^j}, \frac{y_1}{v^j}, \dots, \frac{y_r}{v^j} >) = V(< \frac{z'}{v^j}, \frac{y'_1}{v^j}, \dots, \frac{y'_r}{v^j} >);$$

- iv. el divisor excepcional E_j ,
- v. $T_j = Z_j \cap E_j$,
- vi. el ideal de coeficientes de $f_j = \frac{f}{v^j}$ (el transformado estricto de f_{j-1}) referido al sistema de coordenadas

$$F_j = \left\{ \frac{z}{v^j}, \frac{y_1}{v^j}, \dots, \frac{y_r}{v^j}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v \right\},$$

en el punto

$$x_j = V \left(< \frac{z}{v^j}, \frac{y_1}{v^j}, \dots, \frac{y_r}{v^j}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v > \right)$$

y que viene dado por:

$$\mathcal{K}_{x_j}^{F_j} = v^{j(c-b!)} \left(\frac{\mathcal{K}_{x_{j-1}}^F}{v^{jb!}} \right),$$

- vii. el ideal de coeficientes de $f_j = \frac{f}{v^j}$, referido al sistema regular de parámetros

$$F'_j = \left\{ \frac{z'}{v^j}, \frac{y'_1}{v^j}, \dots, \frac{y'_r}{v^j}, y'_{r+1}, \dots, y'_{n-1}, v \right\},$$

en el punto x_j :

$$\mathcal{K}_{x_j}^{F'_j} = < \frac{c_i^{(\frac{b!}{b-i})}}{v^{b!}} > = v^{j(c'-b!)} \frac{\mathcal{K}_{x_{j-1}}^{F'_j}}{v^{jc'}},$$

Sea además

$$\text{Sing}(X_j, b) = \{x' \in X_j : \text{ord}_{x'}(f_j) \geq b\}.$$

Tal y como hemos definido N en (4.1) se tiene que

$$N(c' \geq Lb!)$$

y

$$N(c - b!) < Lb!.$$

Sea

$$K = \max\{l \in \mathbb{N} : N(c - b!) \geq lb!\}.$$

Por definición $k > l$. Consideremos la secuencia de explosiones

$$V_N \longleftarrow V_{N+1} \longleftarrow \dots \longleftarrow V_{N+K}$$

con centros permisibles $Q_j \subset \text{Sing}(X_j, b) \subset V_{N+j}$, $j \in \{0, 1, \dots, L-1\}$, definidos como $Q_j = V(< \frac{z}{v^{N+j}}, v >)$. Obsérvese que en tal caso se tiene que para $j = 1, \dots, K$,

$$\begin{aligned} x_{N+j} &= V(< \frac{z}{v^{N+j}}, \frac{y_1}{v^N}, \dots, \frac{y_r}{v^N}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v >) = \\ &= V(< \frac{z'}{v^{N+j}}, \frac{y'_1}{v^N}, \dots, \frac{y'_r}{v^N}, y'_{r+1}, \dots, y'_{n-1}, v >). \end{aligned}$$

Sean

$$F_{N+j} = \left\{ \frac{z}{v^{N+j}}, \frac{y_1}{v^N}, \dots, \frac{y_r}{v^N}, y_{r+1}, \dots, y_{n-1}, v \right\},$$

y

$$F'_{N+j} = \left\{ \frac{z'}{v^{N+j}}, \frac{y'_1}{v^N}, \dots, \frac{y'_r}{v^N}, y'_{r+1}, \dots, y'_{n-1}, v \right\}.$$

Entonces:

$$\mathcal{K}_{x_{N+j}}^{F_{N+j}} = < \frac{(\mathcal{K}_{x_{N+j-1}}^{F_{N+j-1}})}{v^{b!}} > = v^{(N-j)(c-b!)} \left(\frac{\mathcal{K}_x}{v^{(N-j)b!}} \right).$$

y

$$\mathcal{K}_{x_{N+j}}^{F'_{N+j}} = < \frac{(\mathcal{K}_{x_{N+j-1}}^{F'_{N+j-1}})}{v^{b!}} > = v^{(N-j)(c-b!)} \left(\frac{\mathcal{K}_x^{F'}}{v^{(N-j)b'}} \right).$$

Por definición de N , L y K y por definición del ideal $(\mathcal{K}_{x_{N+K}}^{F_{N+K}})$ se tiene que

$$\text{ord}_{Q_{N+1}}(\mathcal{K}_{x_{N+K}}^{F_{N+K}}) < b!.$$

Entonces por el Lema 4.3.5

$$Q_{N+1} \not\subset \text{Sing}(X_{N+L}, b).$$

Sin embargo,

$$\text{ord}_{Q_{N+1}}(\mathcal{K}_{x_{N+K}}^{F'_{N+K}}) \geq b!,$$

y por lo tanto por el Lema 4.3.5

$$Q_{N+1} \subset \text{Sing}(X_{N+K}, b).$$

Se obtiene por tanto una contradicción y en consecuencia $c = c'$. \square

4.5 La Parte Inicial del Ideal de Coeficientes.

4.5.1 Para cada punto cerrado $x \in X \cap G$, hemos definido el ideal de coeficientes $\mathcal{K}_x^F \in \hat{\mathcal{O}}_{G,x} = \mathcal{R}/\langle z \rangle$, referido a un sistema regular de parámetros fijado en \mathcal{R} , y a ecuaciones locales de X y G en \mathcal{R} . Este ideal depende del sistema regular de parámetros fijado en \mathcal{R} . Sin embargo, a partir del mismo, hemos podido definir en la sección anterior un número racional que no depende de las coordenadas escogidas, y que hemos designado con el nombre de Índice (4.4.2).

Con estos datos aún no tenemos suficiente información como para encarar nuestro problema (la demostración del Teorema 4.1.3). Necesitamos todavía definir algún invariante más.

Con este objeto, introducimos en la Definición 4.5.2, una clase de sistemas de coordenadas: los sistemas de coordenadas vinculados con un sistema regular de parámetros dado. En este contexto, definiremos la *Parte Inicial del Ideal de Coeficientes* (4.5.3). En la Proposición 4.5.4 probaremos que si construimos ideales de coeficientes sólo referidos a este tipo de sistemas de coordenadas, la Parte Inicial del Ideal de Coeficientes permanece invariante.

Definición 4.5.2 *Fijado un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} ,*

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\},$$

diremos que otro sistema regular de parámetros

$$F' = \{z, l_1, \dots, l_{n-1}\}$$

está vinculado con F si:

$$\langle l_1, \dots, l_{n-1} \rangle_S = \langle t_1, \dots, t_{n-1} \rangle_S.$$

Definición 4.5.3 Sean F un sistema regular de parámetros

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\},$$

y \mathcal{K}_x^F el ideal de coeficientes de f_x referido a F . Supongamos que

$$\text{ord}_x \mathcal{K}_x^F = b' \geq b!.$$

y sea

$$J = \{i : \text{ord}_x \bar{c}_i^{\frac{b!}{b-1}} = b'\}. \quad (4.2)$$

Definimos la Parte Inicial del Ideal de Coeficientes \mathcal{K}_x^F como:

$$\langle \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^F \rangle = \langle \text{In}_{m(x)} \left(\bar{c}_i^{\frac{b!}{b-1}} \right)_{i \in J} \rangle \subset \text{Gr}_m(\mathcal{R} / \langle z \rangle).$$

Esto define un ideal en $\text{Gr}_m(\mathcal{R} / \langle z \rangle)$ generado por elementos homogéneos de grado b' .

Proposición 4.5.4 Sea $f \in \mathcal{R}$, y \mathcal{K}_x^F su ideal de coeficientes referido al sistema regular de parámetros $F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}$. Sean F' un sistema regular de parámetros vinculado con F y $\mathcal{K}_x^{F'}$ el Ideal de Coeficientes de f referido al sistema regular de parámetros F' . Entonces

$$\langle \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^F \rangle = \langle \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^{F'} \rangle \subset \text{Gr}_m(\mathcal{R} / \langle z \rangle).$$

Demostración: La demostración consiste esencialmente en analizar la expresión de f al hacer un cambio de coordenadas. Describiremos la demostración en varias etapas:

Etapas 1. Consideramos:

i. la expresión de f como elemento del conjunto $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$:

$$f = c_0 + c_1 z + \dots + c_b z^b + \dots,$$

con $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$,

ii. el ideal \mathcal{K}_x^F ,

$$\mathcal{K}_x^F = \langle \bar{c}^{\frac{b'}{b-i}} \rangle_{i=0,1,\dots,b-1},$$

iii. el conjunto J referido a F como en (4.5.3).

Sea

$$b' = \text{ord}_x \mathcal{K}_x^F,$$

el orden de \mathcal{K}_x^F en el anillo local regular $\hat{\mathcal{O}}_{G,x}$. Para $i = 0, 1, \dots, b-1$, definimos los números naturales

$$e_i = \text{ord}_x c_i, \quad (4.3)$$

que representan el orden de los coeficientes c_i en el anillo local regular \mathcal{R} . Definimos además los números racionales

$$d_i = b' \frac{b-i}{b!}. \quad (4.4)$$

Por definición:

$$e_i \geq d_i, \quad (4.5)$$

con igualdad si y sólo si $i \in J$ como en la definición 4.5.3. Obsérvese además que

$$d_0 > d_1 > \dots > d_{b-1}. \quad (4.6)$$

Etapas 2. Para $i = 0, 1, \dots, b-1$, se tiene que

$$c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^{e_i} \subset \langle t_1, \dots, t_{n-1} \rangle_S^{e_i} = \langle l_1, \dots, l_{n-1} \rangle_S^{e_i}.$$

Consideremos la expresión de c_i como elemento del conjunto $[z, l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$:

$$c_i = h_{i,0} + h_{i,1}z + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j}z^j \quad (4.7)$$

con $h_{i,j} \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$. Como $c_i \in \langle l_1, \dots, l_{n-1} \rangle_S^{e_i}$ resulta que:

$$h_{i,j} \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S^{e_i}, \quad (4.8)$$

para $i = 0, 1, \dots, b-1$, y $j \in \mathbb{N}$. Puesto que $\text{ord}_x c_i = e_i$, podemos concluir además que

$$h_{i,0} \neq 0, \text{ y que } \text{In}_{m(x)}(c_i) = \text{In}_{m(x)}(h_{i,0}) \in \text{Gr}_m(\mathcal{R}). \quad (4.9)$$

Etapla 3. Consideremos ahora la expresión de f como elemento del conjunto

$$[z, l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0,$$

es decir:

$$f = c'_0 + c'_1 z + \dots + c'_b z^b + \dots,$$

con $c'_i \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{K}_x^{F'}$, el Ideal de Coeficientes, referido a F' y sea

$$J' = \{i : \text{ord}_x \overline{c'_i}^{\frac{b}{b-1}} = b'\}. \quad (4.10)$$

Para construir esta nueva expresión de f , podemos partir de la expresión de f como elemento del conjunto $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, (Etapla 1), cambiar de coordenadas a cada coeficiente c_i , (Etapla 2), y luego agrupar la expresión obtenida según las potencias de z .

Así:

$$\begin{aligned} f &= c_0 + c_1 z + \dots + c_b z^b + \dots = \\ &= (h_{0,0} + h_{0,1} z + \dots) + z(h_{1,0} + h_{1,1} z + \dots) + \dots + z^b(h_{b,0} + h_{b,1} z + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f &= h_{0,0} + z(h_{0,1} + h_{1,0}) + \dots + \\ &+ z^b(h_{0,b} + h_{1,b-1} + \dots + h_{b,0}) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k, \end{aligned} \quad (4.11)$$

con $H_k = \sum_{i+j=k} h_{i,j}$.

A continuación concluiremos la demostración de la proposición, aplicando un argumento inductivo:

- Por construcción:

$$c'_0 = h_{0,0},$$

y por la Etapla 2 (4.9):

$$\text{In}_{m(x)} c_0 = \text{In}_{m(x)} c'_0 \in \text{Gr}_m(\mathcal{R}).$$

- Consideraremos dos casos según sea el orden de c_1 :
 - Si $\text{ord}_x(c_1) = d_1$ (véase (4.4)), entonces, puesto que $e_0 \geq d_0 > d_1$ (véase (4.5) y (4.6)), se tiene que

$$c'_1 = h_{1,0} + h_{0,1},$$

(véase 4.11), y además,

$$\text{In}_{m(x)}(c_1)' = \text{In}_{m(x)}(h_{1,0}) = \text{In}_{m(x)}(c_1).$$

En este caso definimos:

$$h_{1,0}^1 = h_{1,0} + h_{0,1}, \quad (4.12)$$

y para $j \geq 1$,

$$h_{1,j}^1 = 0. \quad (4.13)$$

- Si $\text{ord}_x(c_1) > d_1$ en (4.11) tenemos que:

$$h_{1,0} + h_{0,1} = \sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j}^1 z^j,$$

con

$$h_{1,j}^1 \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_{\mathcal{S}}^{e_1},$$

y en consecuencia

$$c'_1 = h_{1,0}^1 \text{ y } \text{ord}_x(c_1)' > d_1.$$

Llegados a este punto ordenamos de nuevo la expresión de f , agrupando sólo según las potencias de z obtenidas de la expresión para c_1 :

$$\begin{aligned} f &= h_{0,0} + h_{1,0}^1 z + [(h_{0,2} + h_{1,1} + h_{2,0}) + h_{1,1}^1] z^2 + \dots \\ &\dots + [(h_{0,k} + h_{1,k} + \dots + h_{k,0}) + h_{1,k-1}^1] z^k + \dots \end{aligned}$$

- Para $1 < k < b$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f &= h_{0,0} + h_{1,0}^1 z + \dots + h_{k-1,0}^{k-1} z^{k-1} + \\ &+ z^k [(h_{0,k} + h_{1,k-1} + \dots + h_{k,0}) + (h_{1,k-1}^1 + h_{2,k-2}^2 + \dots + h_{k-1,1}^{k-1})] + \dots + \end{aligned}$$

$+ \dots + z^b [(h_{0,b} + \dots + h_{b,0}) + (h_{1,b-1}^1 + \dots + h_{k-1,b-k-1}^{k-1})] + \dots,$
donde para $i + j = k$, $i \neq k$,

$$\text{ord}_x(h_{i,j}) \geq d_{k-1}, \quad (4.14)$$

véase (4.5), (4.7) y (4.8), y

$$\text{ord}_x(h_{i,j}^i) \geq d_{k-1}. \quad (4.15)$$

Puesto que $d_{k-1} > d_k$ (véase (4.6)) si $\text{ord}_x(c_k) = d_k$, entonces por (4.9), (4.14) y (4.15):

$$\text{In}_{m(x)}(c'_k) = \text{In}_{m(x)}(h_{k,0}) = \text{In}_{m(x)}(c_k). \quad (4.16)$$

En caso contrario

$$\text{ord}_x(c'_k) > d_k.$$

A continuación, reagrupamos los términos de la expresión:

$$\begin{aligned} & [(h_{0,k} + h_{1,k-1} + \dots + h_{k,0}) + (h_{1,k-1}^1 + h_{2,k-2}^2 + \dots + h_{k-1,1}^{k-1})] = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} h_{k,i}^k z^i, \end{aligned}$$

con $h_{k,i}^i \in [l_1, \dots, l_{n-1}]^{e_k}$, y se tiene que

$$c'_k = h_{k,0}^k.$$

Reordenamos la expresión para f , según las potencias de z , usando para ello sólo la expresión obtenida para c_k :

$$\begin{aligned} f &= h_{0,0} + h_{1,0}^1 z + \dots + h_{k,0}^k z^k + \\ &+ [(h_{0,k+1} + h_{1,k} + \dots + h_{k+1,0}) + h_{1,k}^1 + \dots + h_{k,1}^k] z^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Si $k < b - 1$ repetiremos este último paso, ahora para $k + 1$.

Por (4.16) podemos concluir que

$$J = J',$$

y que

$$\text{In}_{m(x)}(\mathcal{K}_x^F) = \text{In}_{m(x)}(\mathcal{K}_x^{F'}). \quad \square$$

4.6 Las componentes de altura 1 del Ideal de Coeficientes.

4.6.1 En la sección 4.4 estudiábamos el orden del ideal de coeficientes a lo largo de ciertos subesquemas cerrados. En relación a este estudio introducíamos el que sería nuestro primer invariante: el índice del ideal de coeficientes.

En la presente sección nos interesamos por el orden del ideal de coeficientes a lo largo de ciertas hipersuperficies. En relación con esta idea presentamos la noción de sistema regular de parámetros compatible con un conjunto de hipersuperficies prefijado (4.6.2). El resultado principal de esta sección es la Proposición 4.6.3. A partir del mismo definiremos un nuevo invariante relacionado con las componentes de altura 1 del ideal de coeficientes.

4.6.2 Fijemos un sistema regular de parámetros,

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}.$$

Dado $f \in \mathcal{R}$ consideramos la expresión:

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{b-1} z^{b-1} + c_b z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

con $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$. Consideramos además el ideal de coeficientes asociado a f :

$$\mathcal{K}_x^F = \langle \bar{c}_{i=0, \dots, b-1}^{\frac{b!}{b-1}} \rangle.$$

Sea $\Sigma_x = \{H_1, \dots, H_m\}$, $1 \leq m \leq n-1$, un conjunto de hipersuperficies regulares que contienen al punto x y $G \notin \Sigma_x$. Supongamos que el conjunto de hipersuperficies

$$\Sigma_x \cup G$$

tienen cruzamientos normales.

Diremos que un sistema regular de parámetros

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}$$

es *compatible* con Σ_x si para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que

$$H_j = V(\langle t_i \rangle).$$

A cada índice $j \in \{1, \dots, m\}$, le asociamos el número natural

$$b_j = \text{ord}_{H_j \cap G} \mathcal{K}_x^F.$$

Proposición 4.6.3 *Los números naturales b_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, definidos en 4.6.2, no dependen de la elección del sistema regular de parámetros siempre que éste sea compatible con Σ_x y vinculado con F .*

Demostración: Para probar la Proposición 4.6.3 es suficiente demostrar que el entero b_1 no se modifica si reemplazamos F por un nuevo sistema de coordenadas, F' , que verifique las hipótesis de la proposición.

Desarrollaremos la demostración en tres etapas:

- **Etapla 1.** Para $i = 0, 1, \dots, b-1$ definimos los números racionales:

$$r_i = b_1 \frac{(b-i)}{b!}, \quad (4.17)$$

y los números naturales:

$$s_i = \text{ord}_{H_1}(\bar{c}_i). \quad (4.18)$$

Por definición se tiene que:

$$r_0 > r_1 > \dots > r_{b-1}, \quad (4.19)$$

y como

$$\text{ord}_{H_1}(\bar{c}_i^{\frac{b!}{b-i}}) \geq b_1$$

entonces

$$\text{ord}_{H_1}(\bar{c}_i) \geq b_1 \frac{(b-i)}{b!}$$

y por lo tanto

$$s_i \geq r_i. \quad (4.20)$$

Probaremos a continuación que para $i = 0, 1, \dots, b-1$:

$$\text{ord}_{H_1 \cap G}(\bar{c}_i) = \text{ord}_{H_1}(c_i) = s_i. \quad (4.21)$$

La desigualdad

$$\text{ord}_{H_1 \cap G}(\bar{c}_i) \geq \text{ord}_{H_1}(c_i),$$

es claramente válida.

Como $\text{ord}_{H_1 \cap G}(\bar{c}_i) = s_i$, se tiene que

$$\bar{c}_i = \bar{g}_i \bar{t}_1^{s_i}$$

y $\bar{g}_i \notin \langle \bar{t}_1 \rangle$.

Para $i = 0, 1, \dots, b-1$, sean $g_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$ elementos de \mathcal{R} con clase \bar{g}_i en $\mathcal{R}/\langle z \rangle$. Entonces

$$c_i - g_i t_1^{s_i} \in \langle z \rangle.$$

Si $c_i - g_i t_1^{s_i} \neq 0$, definimos

$$l = \max\{m \in \mathbb{N} : c_i - g_i t_1^{s_i} \in \langle z^m \rangle\}.$$

Nótese que $l > 0$. Sea ahora $h_i \in \mathcal{R}$ tal que

$$c_i - g_i t_1^{s_i} = z^l h_i, \quad (4.22)$$

Consideremos la expresión de h_i como elemento del conjunto $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$:

$$h_i = d_{i,0} + d_{i,1}z + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j}z^j$$

con $d_{i,j} \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, y $d_{i,0} \neq 0$ para $i = 0, 1, \dots, b-1$. En consecuencia

$$c_i = g_i t_1^{s_i} + \sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j} z^{l+j}$$

donde $g_i t_1^{s_i} \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, por lo que la expresión que hemos obtenido para c_i , es la expresión del mismo como elemento de $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$. Por el Lema 4.3.3 esta expresión es única. Luego necesariamente $h_i = 0$ en (4.22).

• **Eta**pa 2. Sean

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}$$

y

$$F' = \{z, l_1, \dots, l_{n-1}\}$$

dos sistemas regulares de parámetros compatibles con Σ_x , y F' vinculado con F . Entonces para $j = 1, \dots, n-1$:

$$t_i \in \langle l_1, \dots, l_{n-1} \rangle_S$$

Ordenando de manera adecuada los elementos de F' podemos suponer que para $i = 1, \dots, m$,

$$\mathcal{I}(H_i) = \langle l_i \rangle,$$

por lo que existe una unidad $\alpha \in \mathcal{R}$ tal que

$$t_1 = \alpha l_1.$$

Sea ahora

$$f = c'_0 + c'_1 z + \dots + c'_b z^b + \dots$$

la expresión de f como elemento del conjunto $[z, l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$, con

$$c'_i \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S.$$

Con un argumento análogo al utilizado en la demostración de la Proposición 4.5.4, podemos partir de la expresión para f como elemento del conjunto $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, cambiar de coordenadas los coeficientes c_i , ($i = 0, 1, \dots$), y agrupar las expresiones obtenidas según de las potencias de z .

Para $i = 0, \dots, b-1$ se tiene que

$$c_i = h_{i,0} + h_{i,1}z + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j}z^j, \quad (4.23)$$

con $h_{i,j} \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$, para $i \in \mathbb{N}$.

Como para $i = 0, 1, \dots, b-1$,

$$c_i \in \langle t_1^{s_i} \rangle = \langle l_1^{s_i} \rangle$$

(véase (4.21)) existen elementos $g_{i,j} \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$ de modo tal que

$$c_i = \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j}z^j = l_1^{s_i} \sum_{j=0}^{\infty} g_{i,j}z^j. \quad (4.24)$$

Puesto que $t_1^{s_i} g_{i,j} \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S$, y dado que la expresión de c_i como elemento del conjunto $[z, l_1, \dots, l_{n-1}]_S^0$ es única, (Lema 4.3.3), necesariamente:

$$h_{i,j} = t_1^{s_i} g_{i,j} \quad (4.25)$$

para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f &= c_0 + c_1 z + \dots + c_b z^b + \dots = \\ &= (l_1^{s_0} \sum_{j=0}^{\infty} g_{0,j} z^j) + z(l_1^{s_1} \sum_{j=0}^{\infty} g_{1,j} z^j) + \dots + z^{b-1} (l_1^{s_{b-1}} \sum_{j=0}^{\infty} g_{b-1,j} z^j) + \dots \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} &l_1^{s_0} g_{0,0} + z(l_1^{s_0} g_{0,1} + l_1^{s_1} g_{1,0}) + \dots + \\ &+ z^k (l_1^{s_0} g_{0,k} + \dots + l_1^{s_k} g_{k,0}) + \dots + \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ahora argumentamos de manera inductiva:

i. Es inmediato que

$$c'_0 = l_1^{s_0} g_{0,0},$$

(véase (4.23) y (4.25)). Definimos $q_0 = s_0$, (por lo tanto $q_0 \geq r_0$ (4.20)).

ii. Analizaremos ahora el coeficiente c'_1 :

$$l_1^{q_0} g_{0,1} + l_1^{s_1} g_{1,0} = l_1^{q_1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{1,j}^1 z^j \right),$$

con $g_{1,j}^1 \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_s$, $\sum_{j=0}^{\infty} g_{1,j}^1 z^j \notin \langle l_1 \rangle$, y $q_1 \geq \min\{q_0, s_1\}$, (por lo tanto $q_1 \geq r_1$ (4.20)). Entonces

$$c'_1 = l_1^{q_1} g_{1,0}^1,$$

y la expresión para f es:

$$f = l_1^{q_0} g_{0,0} + (l_1^{q_1} g_{1,0}^1) z + \left[(l_1^{q_0} g_{0,2} + l_1^{s_1} g_{1,1} + l_1^{s_2} g_{2,0}) + l_1^{q_1} g_{1,1}^1 \right] z^2 + \dots$$

iii. Para $1 < k < b$,

$$\begin{aligned} f &= l_1^{q_0} g_{0,0} + (l_1^{q_1} g_{1,0}^1) z + \dots + (l_1^{q_k} g_{k-1,0}^{k-1}) z^{k-1} \\ &\quad + [(l_1^{q_0} g_{0,k} + l_1^{s_1} g_{1,k-1} + \dots + l_1^{s_k} g_{k,0}) + \\ &\quad + (l_1^{q_1} g_{1,k-1}^1 + \dots + l_1^{q_{k-1}} g_{k-1,1}^{k-1})] z^k + \dots \end{aligned}$$

con $q_i \geq \min\{q_0, q_1, \dots, q_{i-1}, s_1, \dots, s_i\}$, para $i = 0, 1, \dots, k-1$. Operando en esta última expresión obtenemos que

$$\left[(l_1^{q_0} g_{0,k} + l_1^{s_1} g_{1,k-1} + \dots + l_1^{s_k} g_{k,0}) + (l_1^{q_1} g_{1,k-1}^1 + \dots + l_1^{q_{k-1}} g_{k-1,1}^{k-1}) \right] =$$

$$= l_1^{q_k} \sum_{j=0}^{\infty} g_{k,j}^k z^j$$

con $g_{k,j}^k \in [l_1, \dots, l_{n-1}]_S$, $\sum_{j=0}^{\infty} g_{k,j}^k z^j \notin \langle l_1 \rangle$, y

$$q_k \geq \min\{q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, s_1, \dots, s_k\}.$$

Obsérvese que por (4.19) y (4.20)

$$q_k \geq r_k. \quad (4.27)$$

En consecuencia

$$c'_k = l_1^{q_k} g_k^k.$$

Ahora, usando sólo la expresión obtenida para c_k , transformamos la expresión de f agrupando según las potencias de z .

$$f = l_1^{q_0} + (l_1^{q_1} g_{1,0}^1) z + \dots + l_1^{q_k} g_k^k + \\ + [(l_1^{q_0} g_{0,k+1} + \dots + l_1^{s_{k+1}} g_{k+1,0}^{s_{k+1}}) + (l_1^{q_1} g_{1,k}^1 + \dots + l_1^{q_k} g_{k,1}^k)] z^{k+1} + \dots$$

Si $k < b-1$, volvemos al principio del paso (iii), con $k+1$.

Concluimos por tanto que para $i = 0, 1, \dots, b-1$,

$$\text{ord}_{H_1} c'_i = q_i. \quad (4.28)$$

Puesto que $q_i \geq r_i$ para $i = 0, 1, \dots, b-1$, hemos probado que si $\mathcal{K}_x^{F'}$ es el ideal de coeficientes de f referido al sistema regular de parámetros $\{z, l_1, \dots, l_{n-1}\}$, entonces

$$\text{ord}_{\hat{H}_1} \mathcal{K}_x^{F'} \geq b_1.$$

• Etapa 3.

Afirmamos finalmente que

$$\text{ord}_{\hat{H}_1} \mathcal{K}_x^{F'} = b_1.$$

Supongamos que

$$\text{ord}_{\hat{H}_1} \mathcal{K}_x^{F'} > b_1.$$

Obsérvese que

$$\text{ord}_{\hat{H}_1} \mathcal{K}_x^{F'} > b_1,$$

si y sólo si

$$q_i > r_i$$

para $i = 0, 1, \dots, b-1$ (véase (4.17)). Ahora partimos de la expresión de f respecto al sistema regular de parámetros F' para obtener su expresión respecto al sistema regular de parámetros F . Repitiendo el argumento de la Etapa 2 deduciríamos que para $i = 0, 1, \dots, b-1$,

$$\text{ord}_{H_1}(c_i) \geq q_i > r_i.$$

Para llegar a esta conclusión basta prestar atención a las expresiones (4.27) y (4.28) que se obtendrían al partir de la expresión de f con respecto a F' y obtener la expresión de f con respecto a F . \square

4.7 Demostración del Teorema 4.1.3

Para favorecer la claridad de la demostración del Teorema 4.1.3, la estructuraremos en distintas etapas.

Etapas 1. Justificación del paso al completado.

Escogido un sistema regular de parámetros,

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\},$$

consideramos la expresión de f_x como elemento del conjunto $[z, t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$ (4.3.2):

$$f_x = c_0 + c_1 z + \dots + c_{b_1} z^{b-1} + c_b + z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

con $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$. Definimos el Ideal de Coeficientes de f_x referido a F :

$$\mathcal{K}_x^F = \langle c_{i=0, \dots, b-1}^{\frac{b_i}{b-1}} \rangle (\text{mod } z) = \langle \bar{c}_{i=0, \dots, b-1}^{\frac{b_i}{b-1}} \rangle \subset \mathcal{R} / \langle z \rangle \quad (4.3.7).$$

Proposición 4.7.1 *Sea $x \in G$ un punto cerrado. La intersección*

$$\text{Sing}(X, b) \cap G$$

es vacía localmente en x si y sólo si

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_x^F, b!) = \emptyset.$$

Demostración: La inclusión natural

$$\mathcal{O}_{W,x} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{W,x} \simeq \mathcal{R},$$

induce:

$$h : \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{W,x}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{W,x}).$$

En el transcurso de esta demostración f_x denota un generador de $\mathcal{I}(X)$ en $\mathcal{O}_{W,x}$ y \hat{f}_x un generador de $\mathcal{I}(X)$ en $\hat{\mathcal{O}}_{W,x} = \mathcal{R}$. Para probar la Proposición es suficiente con probar que localmente en x :

$$h^{-1}(\text{Sing}(f_x, b) \cap G) = \text{Sing}(\hat{f}_x, b) \cap G.$$

Puesto que trabajamos con esquemas excelentes se tiene la igualdad:

$$h^{-1}(\text{Sing}(f_x)) = \text{Sing}(\hat{f}_x).$$

Así que para poder concluir la demostración, es suficiente demostrar que $Z \subset \text{Sing}(\hat{f}_x, b)$, si y sólo si $h(Z) \subset \text{Sing}(f_x, b)$.

Sea $Z \subset \text{Sing}(\hat{f}_x, b)$, y sea $q \in \mathcal{R}$ su ideal primo correspondiente, (i.e. $\mathcal{I}(Z)_x = q$). Si $\rho = q \cap \mathcal{O}_{W,x}$, entonces $V(\rho) \in \text{Sing}(f_x)$. Consideremos los anillos regulares $\mathcal{O}_{W,\rho}$, \mathcal{R}_q , y la inclusión natural

$$\mathcal{O}_{W,\rho} \hookrightarrow \mathcal{R}_q.$$

Puesto que \mathcal{R}_q es plano sobre $\mathcal{O}_{W,\rho}$, y la fibra es regular, ([Ma]), todo sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{W,\rho}$, se levanta a un sistema regular de parámetros en \mathcal{R}_q , por lo que se tiene una inclusión natural entre álgebras graduadas:

$$\varphi : \text{Gr}_\rho(\mathcal{O}_{W,r}) \hookrightarrow \text{Gr}_q(\mathcal{R}_q),$$

tal que

$$\varphi(\text{In}_r(f_x)) = \text{In}_q \hat{f}_x.$$

La conclusión de la proposición es ahora inmediata. \square

4.7.2 Estrategia. Para la demostración del teorema 4.1.3, usaremos fuertemente el resultado de la Proposición 4.7.1.

Diremos que una cadena de explosiones

$$R_N \longrightarrow \dots \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 = \text{Spec}(\mathcal{R})$$

es una resolución del exponente idealístico $(\mathcal{K}_x^F, b!)$, si para todo $x' \in R_N$

$$\text{Sing}(\mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}}, b!) = \emptyset,$$

donde $F_{x'}$ es cualquier sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{R_N, y}$ que contenga una ecuación del transformado estricto de G en R_N .

El estudio del comportamiento por explosiones del ideal de coeficientes referido a un sistema regular de parámetros F , nos permitirá elegir centros de explosión $Z \subset \text{Spec}(\mathcal{R})$, con vistas a lograr la resolución de $(\mathcal{K}_x^F, b!)$.

Sea, como en la Proposición 4.7.1, el morfismo natural

$$h : \text{Spec}(\mathcal{R}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{W, x}).$$

Escogeremos centros regulares $Z \subset \text{Sing}(X, b)$ en cuyo caso $h^{-1}(Z) \subset \text{Spec}(\mathcal{R})$ será un centro regular en el que \hat{f}_x tiene orden b .

Para probar el Teorema 4.1.3, nuestra estrategia se basará en los siguientes hechos fundamentales:

- Utilizar la información que obtenemos de los exponentes idealísticos $(\mathcal{K}_x^F, b!)$, para determinar centros de explosión en W .
- Reducir al caso en que \mathcal{K}_x^F está generado por un monomio, pues en esas condiciones la resolución del exponente idealístico es simple.

Etapas 2. Nos proponemos ahora estudiar el comportamiento del Ideal de Coeficientes por explosiones en centros permisibles.

4.7.3 Sea

$$\Sigma_x = \{H_1, \dots, H_m\}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

un conjunto de hipersuperficies regulares que contengan al punto x con $G \notin \Sigma_x$ y tal que

$$\Sigma_x \cup G$$

es un conjunto de hipersuperficies con cruzamientos normales. Sea

$$W_1 \longrightarrow W$$

la explosión de W en un centro permisible Z , que tenga cruzamientos normales con Σ_x , y que esté contenido en $\text{Sing}(X, b)$. Sea $(H_i)_1$ el transformado estricto de H_i , para $i = 1, \dots, m$, y sea E el divisor excepcional.

Como $x_1 \in W_1$, un punto cerrado. Ordenando adecuadamente los elementos de Σ_x podemos suponer que:

$$\Sigma_{x_1} = \{(H_1)_1, \dots, (H_k)_1, E\}, (1 \leq k \leq m)$$

es un conjunto de hipersuperficies con cruzamientos normales que contiene a x_1 . Con esta notación, enunciamos el siguiente lema:

Lema 4.7.4 *Bajo las hipótesis de 4.7.3 podemos encontrar un sistema regular de parámetros F en $\mathcal{O}_{W,x}$, y definir a partir de él un sistema regular de parámetros F_{x_1} en \mathcal{O}_{W_1,x_1} , compatible con Σ_{x_1} , de modo tal que*

$$\mathcal{K}_{x_1}^{F_{x_1}} = \frac{1}{\mathcal{I}(E)^{b!}} \mathcal{K}_x^F \hat{\mathcal{O}}_{W_1,x_1}.$$

Demostración: Nótese que F induce un sistema regular de parámetros en $\mathcal{R} = \hat{\mathcal{O}}_{W,x}$. Haciendo un cambio de base étale si es necesario podemos suponer que el punto x_1 es racional sobre x .

En \mathcal{R} escogemos un sistema regular de parámetros

$$F = \{z, t_1, \dots, t_{n-1}\},$$

tal que:

- i. Es compatible con el conjunto de hipersuperficies $\{H_1, \dots, H_k\}$, y para $i = 1, \dots, k$

$$H_i = V(\langle t_i \rangle).$$

- ii. $\mathcal{I}(Z) = \langle z, t_r, \dots, t_l \rangle$, con $1 \leq r \leq l \leq n-1$.

- iii. $m(x_1) = \langle \frac{z}{t_l}, t_1, \dots, t_{r-1}, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_l, \dots, t_{n-1} \rangle$,

Sea

$$f = c_0 + c_1 z + \dots + c_{b-1} z^{b-1} + c_b z^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$$

con $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^0$, y sea

$$\mathcal{K}_x^F = \langle \bar{c}_{i=0,1,\dots,b-1}^{\frac{b}{b-1}} \rangle = t_1^{l_1} \cdot \dots \cdot t_k^{l_k} \mathcal{I}_x^F, \quad (4.29)$$

el Ideal de Coeficientes de f referido a F , donde para $i = 1, \dots, k$,

$$\text{ord}_{H_i \cap G} \mathcal{K}_x^F = l_i.$$

Consideremos además

$$\text{ord}_x \mathcal{K}_x^F = b'.$$

Sea $R = \text{Spec}(\mathcal{R})$, y

$$R_1 \longrightarrow R$$

la explosión de R con centro Z .

Entonces

$$x_1 \in \text{Spec} \left(\mathcal{R} \left[\frac{z}{t_l}, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l} \right] \right).$$

Sea $\mathcal{R}_1 = \left(\mathcal{R} \left[\frac{z}{t_l}, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l} \right] \right)_{\langle m(x_1) \rangle}$. En \mathcal{R}_1 fijamos el conjunto de representantes $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$, y el sistema regular de parámetros

$$F_{x_1} = \left\{ \frac{z}{t_l}, t_1, \dots, t_{r-1}, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_l, \dots, t_{n-1} \right\}.$$

Consideramos la expresión del transformado estricto de f en \mathcal{R}_1 ,

$$f_1 = \frac{1}{t_l^b} f$$

como elemento del conjunto $\left[\frac{z}{t_l}, t_1, \dots, t_{r-1}, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_{l+1}, \dots, t_{n-1} \right]_{\mathcal{S}}^0$:

$$f = c'_0 + c'_1 \frac{z}{t_l} + \dots + c'_{b-1} \left(\frac{z}{t_l} \right)^{b-1} + c'_b \left(\frac{z}{t_l} \right)^b + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c'_i \left(\frac{z}{t_l} \right)^i$$

con $c'_i \in \left[t_1, \dots, t_{r-1} \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_l, \dots, t_{n-1} \right]_{\mathcal{S}}^0$.

Por otro lado

$$f_1 = \frac{1}{t_l^b} f = \frac{1}{t_l^b} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right).$$

Sea $\text{ord}_Z(c_i) = d_i$. Como $\text{ord}_Z f = b$, por el Lema 4.3.5 $c_i \in [t_1, \dots, t_{n-1}]_S^{d_i}$, con $d_i \geq b - i$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{t_l^b} f = \frac{1}{t_l^b} \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \right) = \sum_{i=0}^{b-1} t_l^{d_i+i-b} \left(\frac{c_i}{t_l^{d_i}} \right) \left(\frac{z^i}{t_l^i} \right) + \sum_{i=b}^{\infty} \frac{c_i z^i}{t_l^b} = \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} h_i \left(\frac{z^i}{t_l^i} \right) + \sum_{i=b}^{\infty} \frac{c_i z^i}{t_l^b}, \end{aligned}$$

con

$$h_i = t_l^{d_i+i-b} \frac{c_i}{t_l^{d_i}} \in \left[t_1, \dots, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_l, \dots, t_{n-1} \right]_S^0,$$

para $i = 0, 1, \dots, b-1$. Como la expresión de f_1 como elemento del conjunto

$$\left[t_1, \dots, \frac{t_r}{t_l}, \dots, \frac{t_{l-1}}{t_l}, t_l, \dots, t_{n-1} \right]_S^0,$$

es única, se tiene que $h_i = c'_i$ y por lo tanto

$$\mathcal{K}_{x_1} = \frac{1}{t_l^{b!}} \mathcal{K}_x^F \mathcal{O}_{W_1, x_1} = t_l^{b'-b!} t_1^{l_k} \dots \left(\frac{t_r}{t_l} \right)^{l_r} \dots \left(\frac{t_k}{t_l} \right)^{l_k} \frac{1}{t_l^{b!-m}} \mathcal{I}_x^F,$$

donde $m = \sum_{i=r}^k l_i$. \square

4.7.5 Para cada punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b)$, definimos

$$\Sigma_x = \{E_1, \dots, E_s\}$$

como el conjunto de divisores excepcionales, (procedentes de explosiones anteriores), que contienen al punto x . Si $\Sigma_x \neq \emptyset$, entonces $1 \leq s \leq n-1$.

Sea F un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} compatible con Σ_x (4.6.2):

$$F = \{z, t_1, \dots, t_s, t_{s+1}, \dots, t_{n-1}\}.$$

En estas condiciones, asociamos a f el ideal:

$$\mathcal{K}_x^F = t_1^{q_1} \dots t_s^{q_s} \mathcal{I}_x = \mathcal{M}_x \mathcal{I}_x, \quad (4.30)$$

con $q_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, s$, y con $\mathcal{I}_x \not\subset \langle t_i \rangle$ $i = 1, \dots, s$. A esta expresión para el ideal de coeficientes la denominaremos *Descomposición Monomial del Ideal de Coeficientes*.

La Proposición 4.6.3, nos garantiza que el ideal \mathcal{M}_x es invariante por cambios de coordenadas compatibles con Σ_x . Sea

$$c = \text{ord}_x(\mathcal{I}_x). \quad (4.31)$$

Lema 4.7.6 *Sea $x \in \text{Sing}(X, b) \cap G$ un punto cerrado como en 4.7.5. Consideremos la explosión con centro x :*

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & R = \text{Spec}(\mathcal{R}) \\ x_1 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Sea x_1 un punto cerrado en $\text{Sing}(X_1, b)$ (donde X_1 denota el transformado estricto de X), y sea

$$\mathcal{K}_{x_1}^{F'} = \mathcal{M}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1}$$

la descomposición monomial correspondiente. Entonces

$$\text{ord}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1} \leq \text{ord}_x \mathcal{I}_x.$$

Demostración: Sea

$$\Sigma_x = \{H_1, \dots, H_s\}.$$

Sea $x_1 \in \text{Sing}(X_1, b)$, un punto cerrado como en el enunciado del lema. Considerando un cambio de base étale si es necesario, podemos suponer que x_1 es racional.

Ordenando de manera adecuada los elementos de Σ_x , podemos suponer que

$$\Sigma_{x_1} = \{(H_1)_1, \dots, (H_l)_1, E\}$$

donde $(H_i)_1$ denota el transformado estricto de H_i , ($l \leq s$), y E es el divisor excepcional introducido tras la explosión con centro x .

En \mathcal{R} consideramos:

- i. Un sistema regular de parámetros, F , compatible con Σ_x :

$$\{z, t_1, \dots, t_{n-1}\}.$$

- ii. Otro sistema regular de parámetros:

$$F' = \{z, y_1, \dots, y_{n-1}\},$$

del que suponemos que

- (a) Está vinculado con F .

(b) Es compatible con

$$\{H_1, \dots, H_l\},$$

y $H_i = V(< y_i >)$ para $i = 1, \dots, l$.

(c) Y además, x_1 es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$< \frac{z}{y_{n-1}}, \frac{y_1}{y_{n-1}}, \dots, \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}}, y_{n-1} >.$$

Bajo estas condiciones, tenemos:

- La descomposición monomial del ideal de coeficientes:

$$\mathcal{K}_x^F = t_1^{q_1} \cdot \dots \cdot t_s^{q_s} \mathcal{I}_x = \mathcal{M}_x \mathcal{I}_x,$$

con $\text{ord}_x(\mathcal{I}_x) = c$.

- Otro ideal de coeficientes:

$$\mathcal{K}_x^{F'} = y_1^{q_1} \cdot \dots \cdot y_l^{q_l} \mathcal{G}_x.$$

(Recordemos que $l \leq s$, y que por tanto si $l < s$ esta no es la descomposición monomial del ideal de coeficientes).

Sea

$$b' = \text{ord}_x \mathcal{K}_x^F = \text{ord}_x \mathcal{K}_x^{F'}.$$

Por la Proposición 4.5.4,

$$\text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^F = \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^{F'}. \quad (4.32)$$

Por lo tanto, en $\text{Gr}_{m(x)}(\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^F &= \text{In}_{m(x)} \mathcal{K}_x^{F'} = \\ &= \text{In}_{m(x)}(t_1^{q_1}) \cdot \dots \cdot \text{In}_{m(x)}(t_s^{q_s}) \text{In}_{m(x)}(\mathcal{I}_x) = \\ &= \text{In}_{m(x)}(y_1^{q_1}) \cdot \dots \cdot \text{In}_{m(x)}(y_l^{q_l}) \text{In}_{m(x)}(\mathcal{G}_x) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Obsérvese que para $i = 1, \dots, l$:

$$\text{In}_{m(x)}(t_i) = \text{In}_{m(x)}(y_i) v_i,$$

donde $v_i \in k(x)$, por lo que podemos suponer que de hecho son iguales.

En \mathcal{O}_{R_1, x_1} escogemos el sistema regular de parámetros

$$F'_{x_1} = \left\{ \frac{z}{y_{n-1}}, \frac{y_1}{y_{n-1}}, \dots, \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}}, y_{n-1} \right\}.$$

Por el Lema 4.7.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{x_1}^{F'_{x_1}} &= \frac{\mathcal{K}_x^{F'_{x_1}}}{y_{n-1}^{b!}} = \\ &= y_{n-1}^{b'-b!} \left(\frac{y_1}{y_{n-1}} \right)^{q_1} \cdots \left(\frac{y_l}{y_{n-1}} \right)^{q_l} \left(\frac{\mathcal{G}_x}{y_{n-1}^{b'-\sum_{i=1}^l q_i}} \right) = \mathcal{M}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1}. \end{aligned}$$

Para $i = l+1, \dots, s$, x_1 no pertenece a los transformados estrictos de las hipersuperficies H_i . Por (4.33) se tiene que

$$\text{ord}_{x_1} \left(\frac{\mathcal{K}_{x_1}^{F'_{x_1}}}{y_{n-1}^{b'-b!}} \right) \leq \sum_{i=1}^l q_i + c.$$

Por lo que se concluye que

$$\text{ord}_{x_1}(\mathcal{I}_{x_1}) \leq c. \quad \square$$

Etapla 3. Conclusión. En lo sucesivo supondremos que la dimensión de W es 3.

Lema 4.7.7 *Supongamos que $n = 3$. Bajo las hipótesis del Lema 4.7.6 si*

$$\text{ord}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1} = \text{ord}_x \mathcal{I}_x$$

entonces x_1 es el único punto de R_1 donde se da la igualdad. Si

$$x' \in \text{Sing}(X_1, b) \cap e^{-1}(x)$$

es un punto cerrado distinto de x_1 y si $F_{x'}$ es un sistema regular de parámetros compatible con $\Sigma_{x'}$ entonces $\mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}}$ es monomial.

Demostración: Basta observar que en la demostración del Lema 4.7.6

$$\text{In}_{m(x)}(\mathcal{I}_x)$$

es un polinomio homogéneo en dos variables y de grado c . Por lo tanto si

$$\tilde{\Sigma}_{x_1} = (r_1, \dots, r_t, c)$$

entonces

$$\text{In}_{m(x)}(\mathcal{I})_x$$

es un polinomio homogéneo de grado 1 elevado a c . \square

Proposición 4.7.8 *Sea $x \in \text{Sing}(X, b) \cap G$ un punto cerrado. Existe una secuencia finita de explosiones en puntos cerrados*

$$\begin{array}{ccccccc} R_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R \\ x_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_0 = x \end{array}$$

de modo que para todo $x' \in R_N$, existe un sistema regular de parámetros $F_{x'}$ compatible con $\Sigma_{x'}$ tal que $\mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}}$ está generado por un monomio.

Demostración: Sea F un sistema regular de parámetros compatible con Σ_x y sea

$$\mathcal{K}_x^F = \mathcal{M}_x \mathcal{I}_x \quad (4.34)$$

la descomposición monomial de \mathcal{K}_x^F como en el enunciado de la proposición.

Obsérvese que $\text{ord}_x \mathcal{I}_x$ permanece invariante por cambios de coordenadas compatibles con Σ_x , (Proposiciones 4.4.3 y 4.6.3). Probaremos la proposición por inducción en $\text{ord}_x \mathcal{I}_x$.

Si $\text{ord}_x \mathcal{I}_x = 0$ el enunciado de la proposición es obviamente cierto. Supongamos que la conclusión de la proposición es cierta siempre que

$$0 \leq \text{ord}_x \mathcal{I}_x < c,$$

y veamos que la proposición se cumple para

$$\text{ord}_x \mathcal{I}_x = c.$$

Obsérvese que, si tras la explosión con centro x ,

$$e : R_1 \longrightarrow R$$

existe $x_1 \in R_1$, con $e(x_1) = x$, cuya descomposición monomial es,

$$\mathcal{K}_{x_1}^{F_{x_1}} = \mathcal{M}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1}$$

repecto de un sistema regular de parámetros adecuado F_{x_1} , y además

$$\text{ord}_{x_1} \mathcal{I}_{x_1} = c,$$

entonces, por el Lema 4.7.7, este punto es el único con esta propiedad, y en el resto de los puntos cerrados $x' \in \text{Sing}(X_1, b) \cap e^{-1}(x)$ existe un sistema regular de parámetros, $F_{x'}$, compatible con $\Sigma_y^{F_{x'}}$ tal que $\mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}}$ es un producto de ideales primos de altura 1.

Supongamos que existe una secuencia infinita de explosiones en puntos cerrados:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & R_0 = R \\ \dots & \longrightarrow & x_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_o = x \end{array}$$

tal que $\text{ord}_{x_i}(\mathcal{I}_{x_i}) = c$, para $i \in \mathbb{N}$, (recordemos, que por el Lema 4.7.6 $\text{ord}_{x_i}(\mathcal{I}_{x_i}) \leq \text{ord}_{x_i}(\mathcal{I}_{x_{i-1}})$). Este mismo lema, nos garantiza que la secuencia de puntos $\{x_i\}$ está unívocamente determinada. Además para todo $i \in \mathbb{N}$ los puntos x_i son todos racionales sobre \mathcal{R} .

Argumento de transversalidad.

Los puntos x_i nunca se encuentran en la intersección de dos divisores excepcionales.

Sea $g \in \mathcal{O}_{G,x}$ un elemento de orden c en x y sea

$$B_1 \longrightarrow B_0 = \text{Spec}(\mathcal{O}_{G,x})$$

la explosión con centro x . Sea g_1 el transformado estricto de g , E el divisor excepcional, y G_1 el transformado estricto de G . Sea $x_1 \in E$ un punto cerrado tal que $\text{ord}_{x_1} g_1|_E = c$. En tal caso

$$\text{In}_{x_1}(g_1|_E)$$

es un polinomio homogéneo de grado c en $\text{Gr}_{x_1}(\mathcal{O}_{E,x_1})$.

Por otro lado

$$\mathrm{Gr}_{x_1}(\mathcal{O}_{E,x_1}) = \mathrm{Gr}_{x_1}(\mathcal{O}_{G_1,x_1}) / < \mathrm{In}_{x_1}(\mathcal{I}(E)_{x_1})$$

por lo que deducimos que si h_{x_1} denota un generador local de $\mathcal{I}(E)_{x_1}$, entonces $\mathrm{In}_{x_1}(h_{x_1})$ y $\mathrm{In}_{x_1}(g_1)$ no tienen factores primos en común.

Por el argumento de transversalidad se tiene que:

- Existe una curva regular $C = C_0 \in G$, de modo que si C_i denota el transformado estricto de C_{i-1} entonces $x_i \in C_i$ para todo $i \in N$, ($x_0 = x$).
- Dado $H_j \in \Sigma_x$ definimos $(H_j)_0 = H_j$ y denotamos por $(H_j)_i$ al transformado estricto de $(H_j)_{i-1}$. Con esta notación y en función de los puntos x_i definimos

$$\Sigma^* = \{H_j \in \Sigma : x_i \in (H_j)_i, \forall i \in N\} \subset \Sigma_x,$$

Si $\Sigma^* \neq \emptyset$, ordenando adecuadamente los elementos de Σ_x , podemos suponer que:

$$\Sigma^* = \{H_1\}.$$

El argumento de transversalidad nos garantiza que podemos definir el conjunto Σ^* .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que de hecho $\Sigma^* = \Sigma_x$. En estas condiciones si denotamos por E_i al divisor excepcional correspondiente a la explosión

$$R_i \longrightarrow R_{i-1},$$

entonces para $i \geq 1$, o bien

$$\Sigma_{x_i} = \Sigma^* \cup E_i,$$

o bien

$$\Sigma_{x_i} = \Sigma^*,$$

donde por abuso de notación $\Sigma^* = \{(H_1)_i\}$.

A continuación distinguiremos dos casos, según Σ^* sea vacío o no.

Si Σ^* es vacío.

Sea $F' = \{z, y_1, y_2\}$ un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} vinculado a F , de modo que

$$C = V(< z, y_2 >).$$

Referido a F' , construimos el Ideal de Coeficientes $\mathcal{K}_x^{F'}$, que en este caso coincide con su descomposición monomial y por lo tanto

$$\text{ord}_x(\mathcal{K}_x^{F'}) = b' = c.$$

Por hipótesis, para cualquier número natural $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x_N \in \text{Spec} \left(\mathcal{R} \left[\frac{z}{y_1^N}, \frac{y_2}{y_1^N} \right] \right),$$

y que x_N es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$< \frac{z}{y_1^N}, y_1, \frac{y_2}{y_1^N} >.$$

En \mathcal{O}_{R_N, x_N} fijamos el conjunto de representantes \mathcal{S} y el sistema regular de parámetros

$$F'_{x_N} = \left\{ \frac{z}{y_1^N}, y_1, \frac{y_2}{y_1^N} \right\}.$$

Por el Lema 4.7.4 se tiene que para todo $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{K}_{x_N} = \frac{1}{y_1^{Nb!}} \mathcal{K}_x^{F'} \mathcal{O}_{R_{x_N}} = (y_1^{N(b'-b!)}) \left(\frac{1}{y_{n-1}^{Nb'}} \mathcal{K}_{x_N}^{F'} \right),$$

por lo que $\mathcal{K}_x^{F'}$ no depende de y_1 , y por tanto $\mathcal{K}_x^{F'} = < y_2 >^c$.

Si Σ^* no es vacío.

Hemos supuesto que

$$\Sigma^* = H_1$$

y por lo tanto

$$\Sigma_{x_i} = \Sigma^* \cup E_i.$$

Sea F' un sistema regular de parámetros en \mathcal{R} , compatible con Σ^* y vinculado con F :

$$F' = \{z, y_1, y_2\},$$

y supongamos que

$$\mathcal{I}(H_1) = \langle y_1 \rangle.$$

Obsérvese que en este caso la curva C viene dada por $H_1 \cap G$, i.e.

$$\mathcal{I}(C) = \langle z, y_1 \rangle.$$

Consideremos la descomposición monomial del ideal de coeficientes

$$\mathcal{K}_x^{F'} = y_1^q \mathcal{I}_x.$$

y $\text{ord}_x \mathcal{I}_x = c$.

Por hipótesis, para cualquier número natural $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x_N \in \text{Spec} \left(\mathcal{R} \left[\frac{z}{y_2^N}, \frac{y_1}{y_2^N} \right] \right),$$

y además x_N es el punto cerrado correspondiente al ideal maximal

$$\left\langle \frac{z}{y_2^N}, \frac{y_1}{y_2^N}, y_2 \right\rangle.$$

En \mathcal{O}_{R_N, x_N} fijamos el conjunto de representantes \mathcal{S} y el sistema regular de parámetros

$$F'_{x_N} = \left\{ \frac{z}{y_2^N}, \frac{y_1}{y_2^N}, y_2 \right\}.$$

Por el Lema 4.7.4 se tiene que

$$\mathcal{K}_{x_N} = \frac{1}{y_2^{Nb!}} \mathcal{K}_x^{F'} \mathcal{O}_{R_{x_N}} = (y_1^{N(b'-b!)}) \left(\frac{1}{y_2^{Nc}} \mathcal{I}_{x_N} \right).$$

Es sabido que en este caso que \mathcal{I}_{x_N} no depende de y_2 , y por tanto

$$\mathcal{K}_x^{F'} = \langle y_1 \rangle^c. \quad \square$$

4.7.9 Con los resultados probados hasta ahora procedemos a demostrar el Teorema 4.1.3:

i. Consideremos la explosión

$$W_1 \longrightarrow W,$$

con centro un punto cerrado

$$x \in \text{Sing}(X, b) \cap G.$$

Sean X_1 y G_1 los transformados estrictos de X y G , respectivamente. Obsérvese que si $X_1 \cap E$ es una componente de dimensión 1 de

$$\text{Sing}(X_1, b) \cap G_1$$

entonces

$$X_1 \cap E = E \cap G_1$$

es una curva combinatoria, y por 2.6.12 es permisible.

ii. Por (i) y por 2.10.2 podemos suponer que existe una secuencia finita de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ (X_N, G_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_1, G_1) & \longrightarrow & (X_0 = X, G_0 = G) \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in \text{Sing}(X_i, G_i)$ (donde X_i y G_i son los transformados estrictos de X_{i-1} y G_{i-1} , respectivamente), de modo tal que todas las componentes de dimensión 1 de $\text{Sing}(X_N, b) \cap G_N$ son permisibles. Además podemos suponer que todas estas componentes tienen cruzamientos normales entre sí y que si C_i y C_j son dos componentes de dimensión 1 de $\text{Sing}(X_N, b) \cap G_N$ con $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, entonces alguna de las dos curvas es combinatoria.

iii. Por el Lema 4.7.4 podemos suponer que, tras una secuencia finita de explosiones en curvas permisibles,

$$\begin{array}{ccccccc} W_{N+L} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_{N+1} & \longrightarrow & W_N \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ (X_{N+L}, G_{N+L}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_{N+1}, G_{N+1}) & \longrightarrow & (X_N, G_N) \end{array}$$

se tiene que $\text{Sing}(X_{N+L}, b) \cap G_{N+L}$ no tiene componentes de dimensión 1.

iv. Por (i), (ii) y (iii) podemos suponer que partimos del caso en que

$$\text{Sing}(X, b) \cap G$$

no tiene componentes de dimensión 1. Por la Proposición 4.7.8 tras una secuencia finita de explosiones:

$$\begin{array}{ccccccc} W_N & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 = W \\ \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ (X_N, G_N) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (X_1, G_1) & \longrightarrow & (X_0 = X, g_0 = G) \end{array}$$

con centros en puntos cerrados $x_i \in \text{Sing}(X_i, b) \cap G_i$, podemos suponer que en cada punto cerrado $x' \in \text{Sing}(X_N, b) \cap G_N$ podemos escoger un sistema regular de parámetros $F_{x'}$ de modo que el ideal de coeficientes $\mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}}$ es monomial.

Tras la discusión planteada en (i), (ii) y (iii) podemos suponer que en cada punto cerrado

$$x \in \text{Sing}(X, b)$$

existe un sistema regular de parámetros F_x de modo tal que el ideal $\mathcal{K}_x^{F_x}$ es monomial. Fijémonos en un punto cerrado $x \in \text{Sing}(X, b)$. Sea $b' = \text{ord}_x \mathcal{K}_x^{F_x}$. Sea $F_x = \{z, y_1, y_2\}$, de modo que

$$\mathcal{K}_x^{F_x} = y_1^{q_1} y_2^{q_2}.$$

con $q_1 + q_2 = b'$.

Ahora distinguimos dos casos:

- Caso 1: Si $q_1, q_2 < b!$.

Obsérvese que en tal caso el ideal

$$\langle \text{In}_x \mathcal{K}_x^{F_x} \rangle \subset \text{Gr}_{m(x)}(\mathcal{R} / \langle z \rangle)$$

determina dos puntos, A y B , en $\text{Proj}(\text{Gr}_{m(x)}(\mathcal{R} / \langle z \rangle))$. Sea $W_1 \rightarrow W$ la explosión con centro x . Sean X_1 y G_1 los transformados estrictos de X y G respectivamente, y sea E el divisor excepcional. Fijémonos en un punto cerrado

$$x' \in \text{Sing}(X_1, b) \cap G_1 \cap E.$$

Si $x' = A$ entonces o bien:

$$m(x') = \langle \frac{z}{y_1}, y_1 \frac{y_2}{y_1} \rangle$$

y

$$F_{x'} = \left\{ \frac{z}{y_1}, y_1 \frac{y_2}{y_1} \right\},$$

o bien

$$m(x') = \langle \frac{z}{y_2}, \frac{y_1}{y_2}, y_2 \rangle$$

y

$$F_{x'} = \left\{ \frac{z}{y_2}, \frac{y_1}{y_2}, y_2 \right\}.$$

Por el Lema 4.7.4, obsérvese que en cualquiera de los casos,

$$\text{ord}_x \mathcal{K}_{x'}^{F_{x'}} \leq \max\{2q_1 + q_2 - b!, 2q_2 + q_1 - b!\} < \{q_1 + q_2\}.$$

Si $x' \neq A, B$, escogemos en \mathcal{R} un sistema regular de parámetros:

$$F'_x = \{z, y_1, t_2\}$$

de modo que

$$m(x') = \langle \frac{z}{y_1}, y_1, \frac{t_2}{y_1} \rangle.$$

Entonces si

$$F'_{x'} = \left\{ \frac{z}{y_1}, y_1, \frac{t_2}{y_1} \right\}$$

se tiene que

$$\mathcal{K}_{x'}^{F'_{x'}} = \frac{\mathcal{K}_x^{F'_x}}{y_1^{b!}} = y_1^{q_1 + q_2 - b!} \left(\frac{\mathcal{K}_x^{F'_x}}{y_1^{q_1 + q_2}} \right)$$

Como $y \neq A, B$ el ideal

$$\frac{\mathcal{K}_x^{F'_x}}{y_1^{q_1 + q_2}}$$

no se anula en el punto x' , y se tiene que:

- i. $\mathcal{K}_{x'}^{F'_{x'}}$ es monomial,
- ii. $\text{ord}_x \mathcal{K}_{x'}^{F'_{x'}} < \text{ord}_x \mathcal{K}_x^{F'_x}$

- Caso 2: Si $q_1 \geq b!$.

Sea $R_1 \longrightarrow R$ la explosión con centro la curva

$$C = V(< z, y_1 >).$$

El transformado estricto de G es naturalmente isomorfo a G , y tras la explosión:

$$\mathcal{K}_x^F = < y_1^{q_1 - b!} y_2^{q_2} > .$$

A la vista de los resultados obtenidos en los casos 1 y 2, la demostración del Teorema 4.1.3 se concluye aplicando un argumento inductivo. \square

Índice de términos

- | | |
|---------------------------------|---|
| $\overline{\Omega}_{W/Y}(E)$ 26 | $\text{Sing}(X, k)$ 154 |
| $\omega(E)$ 27 | $\langle r_1, \dots, r_m \rangle_S^k$ 176 |
| $\omega(\pi)$ 27 | $[r_1, \dots, r_m]_S^k$ 176 |
| l_Z 55-56 | \mathcal{K}_x^F 185 |
| Δ_Z 56 | $i_Z(X, G)$ 187 |
| $\omega(\pi _Z)$ 70, 54 | Σ_x 200, 208, 211 |
| Δ_Z^Z 70 | $\text{Sing}(\mathcal{K}_x^F, b!)$ 207 |
| $E(T)$ 95 | centro combinatorio 52 |
| $E(x)$ 95 | centro geométricamente permis- |
| \mathcal{D}_S 122 | ible 40-41 |
| $\tilde{\Delta}_S^1$ 122 | horizontal 41 |
| $\tilde{\Delta}_S^0(x)$ 122 | vertical 41 |
| F_S 133 | centro permisible 47 |
| $D(\mathcal{O}_{W,x})$ 150 | de primera clase 47 |
| $D(\mathcal{O}_{S,x})$ 150 | de segunda clase 47 |
| $\tilde{\Omega}^1$ 151 | conjunto de representantes 164 |
| $\hat{\Omega}^1$ 151 | curva principal 117 |
| | singular 117 |
| | descomposición monomial del ideal |
| | de coeficientes 211 |
| | ideal de coeficientes 185 |
| | ideal jacobiano 56 |

- índice asociado al ideal de coeficientes* 187
- invariante* 165
- módulo de diferenciales con polos logarítmicos* 25
- morfismo casi-liso* 27
 - geométricamente casi-liso* 27
- parte inicial del ideal de coeficientes* 195
- punto de cruzamiento* 122, 130
 - de primer tipo* 132
 - de segundo tipo* 132
- punto de rango alto* 37
- punto sin cruzamiento* 122, 130
 - de primer tipo* 133
 - de segundo tipo* 133
- subesquema casi-liso* 70
- sistema regular de parámetros*
 - compatible con un conjunto de hipersuperficies Σ_x* 200
 - vinculado con otro* 194-195
- transversalidad* 108-109
 - maximal a un morfismo* 108-109, 161
 - maximal a una hipersuperficie* 161

Bibliografía

- [Ab] S.S. Abhyankar, *Resolution of singularities of Arithmetical Surfaces*, en *Arithmetical Algebraic Geometry*, New York, Harper and Row, (editado por O. F. G. schilling) (1965), 111-152.
- [AH] J. M. Aroca, H. Hironaka. y J. L. Vicente, *The theory of maximal contact*, Memo. Mat. del Instituto Jorge Juan, Madrid, 29, (1975).
- [Ca1] F. Cano. *Desingularization of plane vector fields*, Lecture Notes in Math. n^o 1259, Springer Verlag (1987).
- [Ca2] F. Cano. *Desingularization strategies for three-dimensional vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc., 296,1. (1986), 83-93.
- [Co] I. S. Cohen. *On the structure and ideal theory of complete local rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 57, (1946), 54-106.
- [Cs] V. Cossart. *Polyedre caracteristique d'une singularite*, Thèse, Université de Paris-Sud, Centre Orsay, (1987):
- [CGO] V. Cossart, J. Giraud, U. Orbanz. *Resolution of surface singularities*, Lecture Notes in Math. n^o 1101, Springer Verlag (1984).
- [En] E. Encinas. *Resolución constructiva de singularidades de familias de esquemas*, Tesis, Universidad de Valladolid, (1996).
- [Gi1] J. Giraud. *Étude locale des singularités*, Pub. Math., Orsay, France, (1972).
- [Gi2] J. Giraud. *Sur la theorie du contact maximal*, Math. Zeit., 137, (1974), 285-310.

- [Gi3] J. Giraud. *Contact maximal en caractéristique positive*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., ser. 4, t.8, (1975), 201-234.
- [Gi4] J. Giraud. *Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive*, Bull. Soc. Math. France, 111, (1983), 109-124.
- [Gi5] J. Giraud. *Condition de Jung pour le revêtements radiciels de hauteur un*, Proc. Algebraic Geometry, Tokyo/Kyoto, 1982. Lecture Notes in Math. n° 1016, Springer Verlag (1983).
- [Hi1] H. Hironaka. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II*, Ann. Math. 79, (1964), 109-326.
- [Hi2] H. Hironaka. *Desingularization of complex-analytic varieties*, Actes Cong. Intern. Math. T.2, (1970), 627-631.
- [Hi3] H. Hironaka. *Gardening of infinitely near singularities*, Proc. of Nordic Summer School in Math., Oslo, (1970), 315 -332.
- [Hi4] H. Hironaka. *Bimeromorphic smoothing of complex-analytic spaces*, University of Warwick, (1971), reproduit par le Centre de Mathématique de l'Ecole Polytechnique, Paris.
- [Hi5] H. Hironaka. *Idealistic exponents of singularity*, Algebraic Geometry, John Hopkins centennial lectures, (1977), 52-125.
- [Ku] E. Kunz, *Kähler Differentials*, Vieweg Verlag, (1986).
- [Li] J. Lipman. *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. Math. 107, (1978), 111-147.
- [Ma] H. Matsumura. *Commutative Algebra*, The Benjaming/Cummings Publisng Company, (1980).
- [Ra] M. Raynaud. *Anneaux Locaux Henséliens*, Lect. Notes in Math. No. 169, Springer Verlag, (1970).
- [V1] O. Villamayor. *Constructiveness of Hironaka's resolution*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4 Ser. Vol. 22, No. 1, (1989), 1-32.
- [V2] O. Villamayor. *Patching local uniformizations*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 5 Ser. Vol. 25, No. 6, (1992), 629-677.

- [V3] O. Villamayor. *On smoothness and blowing ups of arithmetical schemes*, Math. Z. 225, (1997), 317-332.
- [V4] O. Villamayor. *Resolution on families*, Math. Ann. 309, (1997), 1-19.
- [Z1] O. Zariski. *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math., vol.43, (1942), 583-593.
- [Z2] O. Zariski. *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, Trans. Amer. Math. Soc., vol.62, (1947), 1-52.
- [ZS1] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*, Vol. I, D. Van Nostrand Company, INC., 1960.
- [ZS2] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra*, Vol. II, D. Van Nostrand Company, INC., 1960.

Reunido el tribunal que suscribe en el día
de la fecha, acordó calificar la presente Tesis
doctoral con APTO CON LAUDE POR UNANIMIDAD

MADRID, 7 de septiembre de 1998